

UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE  
U.F.R. SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

## THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE

Spécialité

BIOINFORMATIQUE, BIOLOGIE STRUCTURALE ET GÉNOMIQUE

Matthieu MANCENY

---

---

### RÉSEAUX DE JEUX

Une extension de la théorie des jeux pour la modélisation des interactions locales.  
Application aux réseaux de régulation génétique.

---

Soutenue le *29 novembre 2006* devant le jury composé de

M. Jacques DEMONGEOT	<i>Président</i>
M. Pierre LESCANNE	<i>Rapporteur</i>
M. Philippe MATHIEU	<i>Rapporteur</i>
M <sup>me</sup> Florence D'ALCHÉ-BUC	<i>Examinatrice</i>
M <sup>me</sup> Anne SIEGEL	<i>Examinatrice</i>
M. Franck DELAPLACE	<i>Directeur de thèse</i>

Thèse préparée dans l'équipe DYNAMIC du laboratoire IBISC  
FRE 2873 CNRS / Université d'Évry-Val d'Essonne



*à mes parents, ma famille, mes amis  
ils savent bien pourquoi...*



---

---

## REMERCIEMENTS

Je tiens avant toute chose à remercier les membres du jury :

- Monsieur Jacques DEMONGEOT, Professeur à la faculté de médecine de Grenoble, pour m'avoir fait l'honneur de présider cette thèse ;
- Messieurs Pierre LESCANNE, Directeur de Recherche au CNRS, et Philippe MATHIEU, Professeur à l'Université de Lille, pour le temps passé à lire et rapporter ce mémoire, pour les échanges et discussions qui ont permis d'enrichir ce document, ainsi que pour leurs encouragements ;
- Mesdames Florence D'ALCHÉ-BUC, Professeure à l'Université d'Évry-Val d'Essonne, et Anne SIEGEL, Chargée de Recherche au CNRS, pour avoir accepté le rôle d'examinatrices, mais également pour leurs questions pertinentes et ouvrant de nombreuses perspectives.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Franck DELAPLACE, Professeur à l'Université d'Évry-Val d'Essonne, pour avoir dirigé cette thèse et surtout pour le soutien constant qu'il m'a offert et dont j'ai pu mesurer la valeur en de multiples occasions ; sans lui, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Je tiens également à remercier tous les membres de l'équipe DYNAMIC (Michel, Cécile, Chafika) et tout spécialement Madame Georgia BARLOVATZ-MEIMON, Professeure à l'Université de Créteil, et directrice de l'équipe, pour (dans le désordre) son humour, ses conseils, ses avis et son regard tout biologiste sur la théorie des jeux.

Enfin, parce que sans eux tout se serait certainement moins bien passé, je remercie chaleureusement les membres du laboratoire IBISC et les amis qui m'ont accompagné durant trois ans. En particulier :

- les gens de la « salle café » pour les (longs) repas animés, Étienne pour les pauses café et les petits nouveaux à qui je souhaite bien du courage : Stéphane, François et Laurent ;
- Antoine et Assia pour les longues soirées d'été passées à rédiger, et pour plein d'autres choses encore ;
- et puis Stéfan, Delphine, Nat, Marie, Aurel *et al.* pour tant de choses que je ne peux pas toutes les citer. . .

*merci*



---

---

# SOMMAIRE

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE - THÉORIE DES JEUX</b>	<b>15</b>
<b>1 Jeux stratégiques</b>	<b>17</b>
<b>2 Interactions locales en théorie des jeux</b>	<b>33</b>
<b>DEUXIÈME PARTIE - RÉSEAUX DE JEUX</b>	<b>51</b>
<b>3 Présentation générale des réseaux de jeux</b>	<b>53</b>
<b>4 Recherche des interactions élémentaires par les réseaux de jeux</b>	<b>73</b>
<b>TROISIÈME PARTIE - APPLICATIONS ET DÉVELOPPEMENT</b>	<b>95</b>
<b>5 Réseaux de régulation génétique et réseaux de jeux</b>	<b>97</b>
<b>6 GNET-PAD pour la modélisation des réseaux de jeux</b>	<b>123</b>
<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>135</b>
<b>A La forme extensive sur un exemple</b>	<b>137</b>
<b>B Jeux répétés et localité spatiale</b>	<b>139</b>
<b>C Tables d'évolution d'<i>Arabidopsis thaliana</i></b>	<b>141</b>
<b>D Preuves</b>	<b>143</b>





---

---

# INTRODUCTION

Dans cette thèse, nous proposons un formalisme de modélisation pour les systèmes complexes s'appuyant sur la théorie des jeux, *la théorie des réseaux de jeux*. Ce formalisme étend les jeux stratégiques afin de capturer la notion de localité présente dans de nombreux systèmes. Son cadre applicatif s'étend à tous les systèmes où l'étude de la localité est nécessaire à la compréhension du fonctionnement du système. Parmi ces domaines, les réseaux de régulation génétique constituent un champ privilégié. Leur étude exhibe des organisations structurales qui sous-tendent *a priori* un découpage de l'activité globale du système en structures modulaires. L'identification de la localité précède la découverte de sous-systèmes possédant une certaine autonomie et donc une fonction au sein du système. Cette analyse repose toutefois sur la capacité à exhiber de la complexité du système la modularité à partir de l'étude de sa dynamique. Les réseaux de jeux ont pour but de permettre cette analyse.

**Théorie des jeux.** L'analyse des systèmes complexes demande une étude à la fois des composants du système mais également des interactions entre ces composants. La théorie des jeux se pose naturellement comme candidate à la modélisation de ces interactions.

La théorie des jeux peut se définir comme l'étude des modèles mathématiques de conflit et coopération entre des décisionnaires rationnels et intelligents. Elle fournit des techniques mathématiques générales pour analyser des situations dans lesquelles des individus prennent des décisions qui influencent le « bien-être » des autres. De fait, la théorie des jeux se qualifie de « *théorie de la décision en interaction* ».

La théorie des jeux moderne telle que nous la présentons doit sa formalisation à von Neumann et Morgenstern ([vNM44]) qui définissent un cadre de travail théorique pour la *modélisation d'interactions complexes*. Dans ce cadre, un *jeu* se réfère à un ensemble d'interactions entre des individus, appelés *joueurs* ou *agents*. Chaque individu est rationnel, autrement dit les décisions, ou *stratégies*, qu'il prend ont pour but la réalisation de ses propres objectifs. Von Neuman et Morgenstern démontrent que la rationalité peut se modéliser par la maximisation d'une *fonction de gains* qui attribue une récompense aux décisions prises par un joueur, en fonction des décisions des autres joueurs.

Bien qu'initialement développée dans le cadre de la modélisation de phénomènes économiques (enchères, paris, [Gib92, Kre90]), la théorie des jeux est utilisée de nos jours dans de nombreux domaines d'application allant de la théorie de la décision ([LR89]) à la biologie ([HS98, MS82, NS04]) en passant par l'informatique ([Pap01]). Néanmoins, quel que soit le domaine d'applica-

tion, la théorie des jeux se focalise particulièrement sur la recherche d'équilibres, c'est-à-dire la recherche de situations où chaque agent est satisfait de sa décision, au regard des décisions des autres joueurs. Du fait de cette notion, développée sous le terme d'*équilibre de Nash* ([Nas96]), la théorie des jeux peut être qualifiée de « *théorie des équilibres* ».

**Localité et modularité.** Un des enjeux de l'analyse des systèmes complexes est la recherche de *modules*, autrement dit la recherche des « *Basic Building Blocks* » ([MSOI<sup>+</sup>02]) ou briques de base à partir desquelles le système étudié est construit. Analyser un système à la lumière de sa modularité apparaît comme une étape centrale à sa compréhension car mettant en valeur l'organisation du système à partir de ses sous-systèmes. Le comportement global du système est alors vu comme la « somme » ou composition complexe des comportements locaux de chacun des modules.

La notion de localité se pose comme sous tendant ces propriétés de modularité et est donc une notion fondamentale dans l'étude des systèmes complexes ([SFK<sup>+</sup>05] pour les réseaux génétiques). La localité d'interaction rend compte de phénomènes n'intervenant que sur une partie du système étudié, sur les modules. L'étude doit être faite de l'*influence des propriétés locales sur le comportement global* du système. On étudie en particulier les phénomènes dits d'émergence, qui correspondent à l'apparition d'un comportement global que l'on ne pouvait pas prédire à partir de la seule connaissance des entités composant le système. De fait, il est nécessaire d'analyser les interactions entre les composants de ce système pour prédire l'apparition des phénomènes émergents.

La théorie des jeux fournit un cadre pour la modélisation de ces interactions complexes. Néanmoins, elle ne permet pas de capturer les interactions locales. En effet dans un jeu, chaque agent joue contre tous les autres joueurs, autrement dit chaque composant du système est en interaction avec tous les autres.

**Théorie des réseaux de jeux.** La théorie des réseaux de jeux étend la théorie des jeux pour permettre la modélisation des interactions locales. Fondamentalement, la théorie des réseaux de jeux se distingue de la théorie des jeux par la capacité des joueurs à participer à plusieurs jeux simultanément. Un réseau de jeux représente les interactions comme un « *réseau de joueurs et de jeux* » où les joueurs sont reliés aux jeux auxquels ils participent. Dans ce cadre, chaque jeu du réseau décrit les interactions entre les joueurs du jeu ; un joueur impliqué dans plusieurs jeux devra prendre en compte chacun d'entre eux afin de déterminer la meilleure stratégie à jouer. Ces jeux d'interactions, locales car n'impliquant pas l'ensemble des joueurs, sont naturellement identifiés aux modules.

Il devient alors possible de s'intéresser au comportement global des joueurs à partir de leur comportement local dans chacun des jeux auxquels ils participent. L'étude du comportement modulaire du système est réalisé non pas en considérant des modules statiques, *i.e.* un ensemble de joueurs, mais des modules dynamiques, *i.e.* les interactions d'un ensemble de joueurs, c'est-à-dire un jeu. La notion d'équilibre de Nash qui capture les situations résultant des interactions entre les joueurs d'un jeu est étendue aux réseaux de jeux : les équilibres de Nash des différents jeux du réseau, qualifiés d'équilibres locaux, se combinent pour former un équilibre global, définissant ainsi un état d'équilibre pour tous les joueurs et tous les jeux du réseau.

**Un cadre applicatif : les réseaux de régulation génétique.** Bien que la théorie des jeux (en fait les jeux évolutionnaires, [MS82, Wei97]) ait été utilisée avec succès pour l'étude de l'évolution d'une population soumise à la pression sélective ([HS98, KRFB02]), son application

dans le cadre des réseaux biologiques moléculaires est beaucoup plus réduite et récente ([AAP06, CDL<sup>+</sup>06]).

Les réseaux de jeux permettent la modélisation des réseaux de régulation génétique, systèmes complexes biologiques moléculaires décrivant les interactions entre gènes. Ils constituent un cadre intéressant pour ce type de modélisation, les interactions entre gènes s'assimilant à un jeu du réseau. La structure du réseau de jeux capture naturellement la structure du réseau biologique et les gains permettent d'en modéliser la dynamique. Les équilibres stables biologiques du réseau de régulation équivalent alors dans notre modèle aux équilibres du réseau jeu (les équilibres de Nash et les équilibres globaux).

## Organisation du document

Le document se structure en trois parties.

Dans la première partie, « THÉORIE DES JEUX », nous présentons les jeux stratégiques sur lesquels se fondent les réseaux de jeux et nous nous intéressons alors aux modèles permettant de modéliser la localité d'interaction en théorie des jeux.

- Le chapitre 1 (page 17) traite des jeux stratégiques qui se définissent par la donnée des joueurs, de leurs stratégies et de leurs gains. Nous détaillons également l'extension mixte, où les joueurs n'ont pas à choisir spécifiquement la stratégie qu'ils désirent jouer, mais peuvent définir une distribution de probabilités sur l'ensemble de leurs stratégies. La notion d'équilibres de Nash capture les situations d'équilibre, où chaque joueur est satisfait de sa stratégie au regard des stratégies des autres joueurs.
- Le chapitre 2 (page 33) dresse un état de l'art de la localité d'interactions en théorie des jeux. Avant de présenter en détails les différents modèles, nous étudions les représentations servant de support à la localité. Ces supports, que nous avons regroupés sous le terme de *dépendance*, se distinguent par les éléments mis en relation (les agents ou les stratégies), et par les méthodes de calcul employées pour exhiber cette dépendance.

La seconde partie, « RÉSEAUX DE JEUX » s'intéresse aux réseaux de jeux en en donnant tout d'abord une présentation générale avant de poser le problème de la recherche des interactions locales.

- Le chapitre 3 (page 53) présente les principales définitions des réseaux de jeux. Nous y discutons en particulier des deux niveaux d'équilibres : les équilibres locaux correspondent aux équilibres de Nash des jeux du réseau et se combinent en équilibres globaux, à l'échelle du réseau complet. Nous abordons la notion de dépendance qui permet d'analyser l'influence des agents les uns envers les autres. Cette notion est alors utilisée pour présenter des conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global. Nous situons également les réseaux de jeux dans le paysage des modèles de l'état de l'art
- Le chapitre 4 (page 73) s'intéresse à un résultat important de la théorie des réseaux de jeux, la recherche de modules élémentaires par normalisation du réseau. En effet, nous verrons que plusieurs réseaux de jeux peuvent avoir les mêmes équilibres globaux, mais définir des interactions différentes, ils sont alors dits équivalents. Se pose la question d'une représentation canonique, mettant en valeur les modules élémentaires qui sous tendent les interactions locales du réseau. Nous définissons des opérateurs permettant de modifier la structure du réseau (la manière dont est constitué le réseau) et présentons un algorithme décomposant un jeu en un réseau de modules élémentaires.

La troisième partie, « APPLICATION ET DÉVELOPPEMENT », traite de l'utilisation des réseaux de jeux et de leur application aux réseaux de régulation génétique ; elle présente également la plateforme GNET-PAD que nous avons développée.

- Le chapitre 5 (page 97) utilise la théorie des réseaux de jeux pour modéliser les phénomènes de régulation génétique. L'objet de notre modélisation est de définir un réseau de jeux dont les équilibres globaux correspondent aux états stables du réseau de régulation. Sa conception conduit à définir les joueurs, les stratégies et les gains pour chaque jeu du réseau. Nous définissons des jeux modélisant les régulations élémentaires (activation et inhibition) et pouvant se combiner pour créer des réseaux complexes. La modélisation par réseaux de jeux est alors appliquée à deux réseaux de régulation réels : un réseau impliqué dans la régulation de la division cellulaire ([WPSY04]), et un réseau intervenant dans la croissance des fleurs d'*Arabidopsis thaliana* ([ESPLAB04]).
- Le chapitre 6 (page 123) présente GNET-PAD, une plateforme logicielle permettant la modélisation des réseaux de jeux. GNET-PAD autorise le calcul des équilibres locaux et globaux en stratégie pures, l'analyse des dépendances, ainsi que la normalisation d'un jeu, ou du réseau dans son ensemble.

Enfin, la conclusion (page 131) récapitule les travaux effectués durant cette thèse avant d'en présenter les perspectives.





PREMIÈRE PARTIE

---

---

THÉORIE DES JEUX





## Chapitre 1

---

---

# JEUX STRATÉGIQUES

---

<b>1.1</b>	<b>Forme stratégique</b>	<b>18</b>
1.1.1	Définition formelle	18
1.1.2	Jeux à deux joueurs	19
1.1.3	Un exemple de jeux à deux joueurs : Roméo et Juliette	19
<b>1.2</b>	<b>Extension mixte</b>	<b>20</b>
1.2.1	Stratégie mixte	21
1.2.2	Configuration mixte	22
1.2.3	Gains mixtes	23
<b>1.3</b>	<b>Équilibre de Nash</b>	<b>24</b>
1.3.1	Méthodes générales de calcul	25
1.3.2	Calcul des équilibres purs	27
1.3.3	Calcul des équilibres mixtes	29
<b>1.4</b>	<b>Bilan</b>	<b>32</b>

---

*Dans ce chapitre nous donnons les principales définitions des jeux stratégiques, à savoir la représentation sous forme stratégique, l'extension mixte et les équilibres de Nash.*

L'analyse de tout jeu ou conflit doit débiter par la spécification d'un modèle décrivant le jeu. La structure générale du modèle doit être définie avec attention car trop simple, elle pourrait nous forcer à ignorer certains aspects vitaux du jeu, alors que trop complexe, elle pourrait biaiser l'analyse en occultant certains résultats fondamentaux. Pour éviter ces deux cas extrêmes, plusieurs modèles de jeux ont été proposés. Dans le cadre des jeux non-coopératifs (jeux où les joueurs s'affrontent, au contraire des jeux coopératifs où ils s'entraident) les deux principaux modèles sont les jeux sous *forme extensive*, et les jeux sous *forme stratégique*, ou plus simplement jeux stratégiques.

La forme stratégique est conceptuellement plus simple que la forme extensive, et particulièrement adaptée aux problèmes d'analyse en général, et à ceux que nous avons eu à traiter en particulier. Pour ces raisons, la forme stratégique est à la base de la théorie des réseaux de jeux

que nous développons dans la deuxième partie (chapitres 3 et 4). Nous présentons cependant la forme extensive (utilisée notamment au chapitre 2 sur l'état de l'art) au travers d'un exemple dans l'annexe A.

La suite du chapitre se découpe de la manière suivante. Dans la section 1.1 nous définissons formellement la représentation sous forme stratégique. Nous nous intéressons également à une classe de jeux stratégiques particulière, les jeux à deux joueurs, et à leur représentation sous forme de tableaux.

La section 1.2 traite d'une extension des jeux stratégiques, l'extension mixte, où les joueurs n'ont pas à choisir spécifiquement la stratégie qu'ils désirent jouer, mais peuvent définir une distribution de probabilités sur l'ensemble de leurs stratégies. L'extension mixte comporte la définition des stratégies mixtes, des configurations mixtes et des gains mixtes.

Un des concepts fondamentaux de la théorie des jeux est la notion d'équilibres de Nash. La section 1.3 présente cette notion qui permet de déterminer des configurations spécifiques du jeu où chaque joueur est « satisfait » de sa stratégie, au regard des stratégies jouées par les autres participants.

Enfin la section 1.4 dresse un bilan du chapitre.

Le lecteur pourra se référer à [OR94], [Osb03] pour un complément d'informations. Les notations présentées s'inspirent de [Mye91].

## 1.1 Forme stratégique

Un jeu sous forme stratégique, ou jeu stratégique, se compose d'un ensemble de *joueurs*, possédant chacun un ensemble de *stratégies*. Les résultats possibles du jeu sont définis par un ensemble de *configurations*, une configuration consistant à associer une stratégie à chaque joueur. À chacune des configurations du jeu est associé, pour chaque joueur, un *gain* particulier. Les joueurs sont supposés *rationnels*, c'est-à-dire qu'ils cherchent à maximiser leur gain.

Un jeu stratégique modélise donc une décision face à des choix stratégiques, *les joueurs jouent une seule fois et de manière simultanée en pleine connaissance de toutes les informations du jeu*. On parle alors de jeu à information complète.

### 1.1.1 Définition formelle

Le jeu stratégique se définit par une *forme stratégique* qui définit les joueurs, les stratégies et le gain pour chaque joueur en fonction des différentes configurations de jeu. Formellement, la représentation sous forme stratégique se définit de la manière suivante :

DÉFINITION 1.1 (FORME STRATÉGIQUE)

Un jeu stratégique est un triplet  $\langle A, C, u \rangle$  où :

- $A$  est un ensemble de joueurs (ou agents).  
On assimile habituellement  $A$  à l'ensemble  $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ , où chaque entier correspond à un joueur.
- $C = \{C_i\}_{i \in A}$  est un ensemble d'ensembles de stratégies.  
 $C_i = \{c_i^1, \dots, c_i^{m_i}\}$  correspond à l'ensemble des  $m_i$  stratégies accessibles au joueur  $i$ .  
Un élément  $c \in \prod_{i \in A} C_i$  est appelé une configuration de jeu.

- $u : \prod_{i \in A} C_i \rightarrow \mathbb{R}^{|A|}$  est la fonction de gains du jeu<sup>1</sup>.  
On note habituellement  $u = (u_i)_{i \in A}$ , avec  $u_i : \prod_{i \in A} C_i \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de gains du joueur  $i$  qui lui attribue, pour chaque configuration, un gain.

*Remarques.*

1. Les notations présentées ici sont très générales. Dans les exemples, nous utiliserons autant que possible des notations plus explicites. L'exemple 1.1 détaille ainsi un jeu entre Roméo et Juliette. Les joueurs sont alors appelés  $R$  et  $J$  plutôt que 1 et 2. De même, les stratégies sont indexées par les initiales des joueurs plutôt que par des chiffres.
2. Étant donné  $c \in \prod_{i \in A} C_i$ , on notera  $c_i$  une stratégie quelconque du joueur  $i$ .
3. Étant donnée une configuration  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i \in A} C_i$ , pour mettre en évidence la stratégie d'un joueur  $i$ , on écrira de manière usuelle la configuration  $c$  sous la forme  $c = (c_{-i}, c_i)$ .

### 1.1.2 Jeux à deux joueurs

Un intérêt particulier est porté aux jeux stratégiques à deux joueurs car leur étude permet d'aborder de manière simple et directe des propriétés qui se généralisent à des jeux plus complexes. L'exemple 1.1 présente l'énoncé d'un tel jeu.

On représente souvent un jeu à deux joueurs sous la forme d'une table de gains qui en offre une vision synthétique. Ainsi, si l'on considère un jeu  $\langle A, C, u \rangle$  à deux joueurs, on a :

- $A = \{1, 2\}$ .
- $C = \{C_1, C_2\}$  et, dans le cas où le joueur 1 aurait deux stratégies, et le joueur 2 trois stratégies, on aurait  $C_1 = \{c_1^1, c_1^2\}$  et  $C_2 = \{c_2^1, c_2^2, c_2^3\}$ .
- $u = (u_1, u_2)$  avec  $u_1 : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_2 : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

La représentation sous forme de table de gains est alors la suivante :

1/2	$c_2^1$	$c_2^2$	$c_2^3$
$c_1^1$	$(u_1(c_1^1, c_2^1), u_2(c_1^1, c_2^1))$	$(u_1(c_1^1, c_2^2), u_2(c_1^1, c_2^2))$	$(u_1(c_1^1, c_2^3), u_2(c_1^1, c_2^3))$
$c_1^2$	$(u_1(c_1^2, c_2^1), u_2(c_1^2, c_2^1))$	$(u_1(c_1^2, c_2^2), u_2(c_1^2, c_2^2))$	$(u_1(c_1^2, c_2^3), u_2(c_1^2, c_2^3))$

Dans ce tableau à double entrée, les stratégies du joueur 1 sont en lignes, et les stratégies du joueur 2 en colonnes. À une case du tableau est associé le couple des gains des joueurs 1 et 2 correspondant à la configuration définie par les stratégies de la ligne et de la colonne.

### 1.1.3 Un exemple de jeux à deux joueurs : Roméo et Juliette

Considérons l'énoncé de l'exemple 1.1 suivant et cherchons sa représentation sous forme stratégique.

EXEMPLE 1.1 (ROMÉO ET JULIETTE)

*Roméo et Juliette décident de faire une sortie. Roméo préfère aller au théâtre et Juliette à l'opéra, mais aucun des deux n'aime sortir seul.*

<sup>1</sup>On rappelle que  $|A|$  est le cardinal de l'ensemble  $A$ , i.e. le nombre d'éléments de  $A$ . Ici,  $|A| = n$ .

**Joueurs et stratégies.** Les joueurs et les stratégies se déduisent directement de l'énoncé :

- Les *joueurs* sont Roméo (joueur 1 noté  $R$ ) et Juliette (joueur 2, noté  $J$ ).
- Les *stratégies* sont les mêmes pour les deux joueurs qui peuvent aller soit au théâtre (stratégie  $c_1^1$  notée  $T_R$  pour Roméo et  $c_2^1$  notée  $T_J$  pour Juliette), soit à l'opéra (stratégie  $c_1^2$  notée  $O_R$  pour Roméo et  $c_2^2$  notée  $O_J$  pour Juliette). On a donc  $C_R = \{T_R, O_R\}$  et  $C_J = \{T_J, O_J\}$ .

**Gains.** Les gains vont permettre de traduire les préférences des deux joueurs. Roméo préfère aller au théâtre ? Son gain quand il joue sa stratégie  $T_R$  doit alors être supérieur à son gain quand il joue sa stratégie  $O_R$ . Mais il faut également prendre en compte ce que fait Juliette. Nous avons ainsi quatre configurations à ordonner : lorsque Roméo et Juliette vont au théâtre — configuration  $(T_R, T_J)$  — lorsque Roméo va au théâtre et Juliette à l'opéra — configuration  $(T_R, O_J)$  — lorsque Roméo va à l'opéra et Juliette au théâtre — configuration  $(O_R, T_J)$  — et enfin lorsqu'ils vont tous les deux à l'opéra — configuration  $(O_R, O_J)$ .

Ces configurations peuvent, en partie, être ordonnées à l'aide de l'énoncé. Dans le cas de Roméo, nous savons ainsi que :

- $u_R(T_R, T_J)$  doit correspondre au gain maximum pour Roméo, car il s'agit de la configuration idéale pour lui (il est au théâtre, avec Juliette).
- $u_R(O_R, T_J)$  doit correspondre au gain minimal pour Roméo, car il sort d'une part sans Juliette et d'autre part il va à l'opéra. On est donc dans la configuration la pire pour Roméo.

Reste alors à comparer  $u_R(T_R, O_J)$  et  $u_R(O_R, O_J)$ , autrement dit à déterminer si Roméo préfère aller seul au théâtre, ou bien sortir avec Juliette, mais à l'opéra. On se retrouve donc avec deux relations possibles entre les gains, suivant cette préférence.

- Si Roméo préfère être avec Juliette plutôt qu'aller au théâtre :

$$u_R(T_R, T_J) > u_R(O_R, O_J) > u_R(T_R, O_J) > u_R(O_R, T_J)$$

- Si Roméo préfère aller au théâtre plutôt qu'être avec Juliette :

$$u_R(T_R, T_J) > u_R(T_R, O_J) > u_R(O_R, O_J) > u_R(O_R, T_J)$$

**Jeux.** Les considérations faites sur Roméo sont bien sûr identiques dans le cas de Juliette. Il existe alors quatre modèles de jeux possibles. Le tableau 1.1 présente les tables de gains de ces différents jeux (numérotés de (a) à (d)). Les gains attribués sont ici totalement arbitraires et se contentent de vérifier les inégalités vues précédemment. Nous verrons l'importance que la valeur des gains peut avoir dans la section 1.3.

## 1.2 Extension mixte

L'extension mixte rend possible la modélisation de comportements tels que l'indécision ou le bluff. Elle recouvre les notions de stratégies mixtes, de configurations mixtes et de gains mixtes.

<p style="margin: 0;">Jeu <b>a</b></p> <table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>R/J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>T_J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>O_J</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(3, 2)</td> <td style="padding: 5px;">(2, 1)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>O_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(0, 0)</td> <td style="padding: 5px;">(1, 3)</td> </tr> </table> <p style="margin: 5px 0 0 0;">Roméo préfère le théâtre à Juliette Juliette préfère Roméo à l'opéra</p>	$R/J$	$T_J$	$O_J$	$T_R$	(3, 2)	(2, 1)	$O_R$	(0, 0)	(1, 3)	<p style="margin: 0;">Jeu <b>b</b></p> <table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>R/J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>T_J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>O_J</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(3, 2)</td> <td style="padding: 5px;">(1, 1)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>O_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(0, 0)</td> <td style="padding: 5px;">(2, 3)</td> </tr> </table> <p style="margin: 5px 0 0 0;">Roméo préfère Juliette au théâtre Juliette préfère Roméo à l'opéra</p>	$R/J$	$T_J$	$O_J$	$T_R$	(3, 2)	(1, 1)	$O_R$	(0, 0)	(2, 3)
$R/J$	$T_J$	$O_J$																	
$T_R$	(3, 2)	(2, 1)																	
$O_R$	(0, 0)	(1, 3)																	
$R/J$	$T_J$	$O_J$																	
$T_R$	(3, 2)	(1, 1)																	
$O_R$	(0, 0)	(2, 3)																	
<p style="margin: 0;">Jeu <b>c</b></p> <table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>R/J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>T_J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>O_J</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(3, 1)</td> <td style="padding: 5px;">(2, 2)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>O_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(0, 0)</td> <td style="padding: 5px;">(1, 3)</td> </tr> </table> <p style="margin: 5px 0 0 0;">Roméo préfère le théâtre à Juliette Juliette préfère l'opéra à Roméo</p>	$R/J$	$T_J$	$O_J$	$T_R$	(3, 1)	(2, 2)	$O_R$	(0, 0)	(1, 3)	<p style="margin: 0;">Jeu <b>d</b></p> <table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>R/J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>T_J</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>O_J</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>T_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(3, 1)</td> <td style="padding: 5px;">(1, 2)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>O_R</math></td> <td style="padding: 5px;">(0, 0)</td> <td style="padding: 5px;">(2, 3)</td> </tr> </table> <p style="margin: 5px 0 0 0;">Roméo préfère Juliette au théâtre Juliette préfère l'opéra à Roméo</p>	$R/J$	$T_J$	$O_J$	$T_R$	(3, 1)	(1, 2)	$O_R$	(0, 0)	(2, 3)
$R/J$	$T_J$	$O_J$																	
$T_R$	(3, 1)	(2, 2)																	
$O_R$	(0, 0)	(1, 3)																	
$R/J$	$T_J$	$O_J$																	
$T_R$	(3, 1)	(1, 2)																	
$O_R$	(0, 0)	(2, 3)																	

TAB. 1.1 – Différentes tables de gains pour modéliser l'exemple 1.1 entre Roméo et Juliette

### 1.2.1 Stratégie mixte

Les *stratégies mixtes* étendent la notion de stratégies en définissant pour un joueur une distribution de probabilités sur l'ensemble de ses stratégies, déterminant ainsi leur probabilité d'utilisation.

#### DÉFINITION 1.2 (STRATÉGIES MIXTES ET PURES)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, et  $i \in A$  un joueur. On rappelle que  $C_i = \{c_i^1, \dots, c_i^{m_i}\}$  est l'ensemble des stratégies du joueur  $i$ . On note par  $\Delta(C_i)$  l'ensemble des stratégies mixtes du joueur  $i$  :

$$\Delta(C_i) = \left\{ (p_i^j)_{j \in [1:m_i]} \mid \forall j \in [1:m_i] \quad 0 \leq p_i^j \leq 1 \wedge \sum_{j=1}^{m_i} p_i^j = 1 \right\}$$

Par analogie au terme « mixte », les éléments de  $C_i$  sont appelés *stratégies pures* du joueur  $i$ . À la stratégie pure  $c_i^k \in C_i$  est associée sa *représentation mixte*  $\sigma_i = (p_i^j)_{j \in [1:m_i]} \in \Delta(C_i)$  telle que  $p_i^k = 1$  et  $p_i^j = 0$  pour  $j \in [1:m_i], j \neq k$ . Suivant le contexte, par abus de notation  $c_i^k$  pourra représenter soit la stratégie pure, soit la stratégie mixte associée.

*Remarques.*

1.  $\Delta(C_i)$ , l'ensemble des stratégies mixtes d'un joueur  $i$ , définit un simplexe sur les stratégies pures  $C_i$  de ce joueur.
2. Dans la suite, il sera fait référence aux stratégies mixtes d'un joueur  $i$  par la lettre  $\sigma_i$ , qui représente donc un élément de  $\Delta(C_i)$ .
3. Étant donnée  $\sigma_i \in \Delta(C_i)$ , on notera  $\sigma_i[c_i^k]$  la probabilité du joueur  $i$  de jouer sa  $k$ -ième stratégie, i.e.  $\sigma_i[c_i^k] = p_i^k$ .
4. En cas d'exemple numérique, pour plus de clarté, on pourra noter  $\sigma_i = (\sum_{k \in [1:m_i]} p_i^k [c_i^k])$ , rappelant ainsi entre  $[ ]$  à quelle stratégie fait référence la probabilité  $p_i^k$ . (Voir l'exemple 1.2.)

## EXEMPLE 1.2 (STRATÉGIE MIXTE)

Reprenons l'un des jeux de l'exemple 1.1. Une stratégie mixte  $\sigma_R \in \Delta(C_R)$  pour Roméo est par exemple d'aller au théâtre avec la probabilité  $\sigma_R[T_R] = \frac{1}{3}$  et à l'opéra avec la probabilité  $\sigma_R[O_R] = \frac{2}{3}$ . On note alors  $\sigma_R = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , ou plus clairement  $\sigma_R = (\frac{1}{3}[T_R] + \frac{2}{3}[O_R])$ .

La stratégie pure  $T_R \in C_R$  consiste à aller au théâtre avec une probabilité 1, et donc à l'opéra avec une probabilité 0. La stratégie mixte associée est alors  $(1, 0) = [T_R] \in \Delta(C_R)$ .

## 1.2.2 Configuration mixte

Dans une configuration mixte, les joueurs ont la possibilité de jouer une de leur stratégie mixte montrant ainsi leur indécision.

L'ensemble des configurations mixtes d'un jeu se définit de la manière suivante.

## DÉFINITION 1.3 (CONFIGURATIONS MIXTES)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. On note par  $\Delta(C)$  l'ensemble des configurations mixtes du jeu :

$$\Delta(C) = \prod_{i \in A} \Delta(C_i)$$

Remarques.

1. Une configuration mixte où tous les joueurs ont des stratégie pures, est appelée *configuration pure* ; une configuration pure est élément de  $\prod_{i \in A} C_i$ .
2. Une configuration mixte décrit une distribution de probabilités sur l'espace des configurations pures  $\prod_{i \in A} C_i$ .
3. Comme dans le cas des configurations pures, pour mettre en évidence le choix d'un joueur  $i$  dans une configuration mixte  $\sigma$ , celle-ci sera écrite  $\sigma = (\sigma_{-i}, \sigma_i)$ . On aura alors  $\sigma_i \in \Delta(C_i)$  et  $\sigma_{-i} \in \prod_{j \in A-i} \Delta(C_j)$ .

Les configurations mixtes permettent de calculer la probabilité de se trouver dans une situation donnée, i.e. dans une configuration pure, au vue des indécisions des différents joueurs. La fonction  $Pr$  permet de déterminer cette probabilité.

## DÉFINITION 1.4 (PROBABILITÉ D'UNE CONFIGURATION PURE)

La fonction  $Pr$  permet de calculer la probabilité d'être dans une configuration pure  $c \in \prod_{i \in A} C_i$  étant donné la configuration mixte  $\sigma \in \Delta(C)$  :

$$Pr : \prod_{i \in A} C_i \times \Delta(C) \rightarrow [0, 1]$$

$$(c, \sigma) \mapsto Pr(c, \sigma) = \prod_{i \in A} \sigma_i[c_i]$$

## EXEMPLE 1.3 (CONFIGURATION MIXTE)

Reprenons l'un de jeux de l'exemple 1.1 et considérons les stratégies mixtes de Roméo et Juliette suivantes :

$$\sigma_R = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}[T_R] + \frac{2}{3}[O_R]\right) \in \Delta(C_R) \text{ pour Roméo}$$

$$\sigma_J = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}[T_J] + \frac{1}{6}[O_J]\right) \in \Delta(C_J) \text{ pour Juliette}$$

La configuration mixte correspondant à ces deux stratégies est alors :

$$\sigma = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right) = \left(\left(\frac{1}{3}[T_R] + \frac{2}{3}[O_R]\right), \left(\frac{5}{6}[T_J] + \frac{1}{6}[O_J]\right)\right)$$

La probabilité pour que Roméo et Juliette aillent au théâtre est donnée par la fonction  $Pr$  :

$$Pr((T_R, T_J), \sigma) = \sigma_R[T_R] \times \sigma_J[T_J] = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

Le tableau suivant présente le calcul des différentes probabilités des configurations pures, au regard de la configuration mixte  $\sigma$ . On peut remarquer que la somme de ces probabilités est égale à 1, et que l'on a donc bien une distribution de probabilités sur l'espace des configurations pures.

$R/J$	$\sigma_J[T_J] = \frac{5}{6}$	$\sigma_J[O_J] = \frac{1}{6}$
$\sigma_R[T_R] = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{18}}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{18}}$
$\sigma_R[O_R] = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{9}}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{9}}$

### 1.2.3 Gains mixtes

Les gains associés aux stratégies mixtes diffèrent de la présentation initiale qui en a été faite dans le sens où ils correspondent à une *espérance de gains* du jeu. L'exemple 1.4 permet d'illustrer cette notion.

#### EXEMPLE 1.4 (GAINS MIXTES)

Considérons le jeu de l'exemple 1.1 et plus précisément la table de gain ( $a$ ) du tableau 1.1. Dans le cas de la configuration mixte  $\sigma$  de l'exemple 1.3, nous avons calculé les différentes probabilités pour que les joueurs se trouvent dans une des quatre configurations pures possibles. Le gain mixte associé à ces configurations est donné dans le tableau suivant. Il consiste en fait au gain pur de la configuration multiplié par la probabilité d'être dans cette configuration.

$R/J$	$\sigma_J[T_J] = \frac{5}{6}$	$\sigma_J[O_J] = \frac{1}{6}$
$\sigma_R[T_R] = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{18} \times (3, 2) = \boxed{(\frac{5}{6}, \frac{5}{9})}$	$\frac{1}{18} \times (2, 1) = \boxed{(\frac{1}{9}, \frac{1}{18})}$
$\sigma_R[O_R] = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{9} \times (0, 0) = \boxed{(0, 0)}$	$\frac{1}{9} \times (1, 3) = \boxed{(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})}$

Le gain global associé à la configuration mixte est alors la somme des gains mixtes associés à chacune des configurations pures. Ce gain est noté  $\pi$

$$\begin{aligned} \pi(\sigma) &= Pr((T_R, T_J), \sigma) \times u(T_R, T_J) + Pr((T_R, O_J), \sigma) \times u(T_R, O_J) \\ &\quad + Pr((O_R, T_J), \sigma) \times u(O_R, T_J) + Pr((O_R, O_J), \sigma) \times u(O_R, O_J) \\ &= \frac{5}{18} \times (3, 2) + \frac{1}{18} \times (2, 1) + \frac{5}{9} \times (0, 0) + \frac{1}{9} \times (1, 3) \\ &= (\frac{5}{6}, \frac{5}{9}) + (\frac{1}{9}, \frac{1}{18}) + (0, 0) + (\frac{1}{9}, \frac{1}{3}) \\ &= (\frac{19}{18}, \frac{17}{18}) \end{aligned}$$

De façon formelle, on définit le gain d'une configuration mixte de la manière suivante.

**DÉFINITION 1.5 (FONCTION DE GAINS MIXTES)**

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Le gain associé à une configuration mixte est donné par la fonction de gains mixtes  $\pi$  telle que :

$$\begin{aligned} \pi : \Delta(C) &\rightarrow \mathbb{R}^{|A|} \\ \sigma &\mapsto \pi(\sigma) = \left( \sum_{c \in \prod_{i \in A} C_i} Pr(c, \sigma) \times u_i(c) \right)_{i \in A} \end{aligned}$$

*Remarque.* La fonction  $\pi : \Delta(C) \rightarrow \mathbb{R}^{|A|}$  permet de calculer le gain mixte, associé à une configuration mixte, pour tous les joueurs. Le gain d'un joueur en particulier, le joueur  $i$  par exemple, est noté  $\pi_i : \Delta(C) \rightarrow \mathbb{R}$ .

En considérant les extensions mixtes, nous disposons d'un moyen d'exprimer une probabilité de choix. Généralement, les stratégies mixtes et pures sont clairement distinguées dans le jeu car elles ne modélisent pas la même chose. Les stratégies pures modélisent des choix par rapport à des actions ; c'est pourquoi en économie elles sont choisies pour définir des comportements entre individus. Les stratégies mixtes peuvent désigner des probabilités ou des choix sur des populations.

### 1.3 Équilibre de Nash

La notion d'équilibre de Nash est une notion centrale en théorie des jeux. Elle fut introduite par John Nash en 1951 ([Nas51]). Cette notion s'applique aux stratégies pures et mixtes. Elle permet de distinguer des choix probabilistes assimilés à des états stables du jeu. En ce sens, les équilibres de Nash pourraient correspondre aux choix que peuvent faire les joueurs.

Un équilibre de Nash se définit comme une configuration du jeu d'où aucun joueur ne peut s'écarter seul sans encourir une diminution de son gain. Autrement dit, une déviation unilatérale d'un joueur entraînerait une diminution du gain de ce joueur. Formellement, un équilibre de Nash se définit de la manière suivante :

**DÉFINITION 1.6 (ÉQUILIBRE DE NASH)**

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, soit  $\sigma^* \in \Delta(C)$  une configuration mixte.  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\forall i \in A, \quad \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*)$$

*Remarques.*

1. On rappelle que  $(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*) = \sigma^*$ .
2. De même,  $(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$ .
3. La configuration  $(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$  correspond donc à la configuration  $\sigma^* = (\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*)$  où le joueur  $i$  choisit de jouer sa stratégie  $\sigma_i$  plutôt que sa stratégie  $\sigma_i^*$ , les autres joueurs conservant leurs stratégies.

Une des questions importantes concernant l'équilibre de Nash est son existence pour un jeu donné. Le théorème 1.1 suivant répond à la question en affirmant l'existence d'un équilibre en stratégies mixtes, quelque soit le jeu (le lecteur intéressé par la preuve peut se référer à [Nas51]).



## THÉORÈME 1.1 (EXISTENCE D'UN ÉQUILIBRE DE NASH)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Il existe une configuration mixte  $\sigma^* \in \Delta(C)$  qui soit un équilibre de Nash.

Un jeu admet donc un équilibre de Nash en stratégie mixte. Nous verrons que ce n'est pas nécessairement le cas si l'on se contente des stratégies pures. D'autre part, un jeu n'admet pas forcément un unique équilibre de Nash. La définition suivante décrit l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu.

## DÉFINITION 1.7 (ENSEMBLE DES ÉQUILIBRES DE NASH)

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. On note par  $\mathbf{Nash}(G)$  l'ensemble des équilibres de Nash du jeu  $G$ .

$$\mathbf{Nash}(G) = \left\{ \sigma^* \in \Delta(C) \mid \forall i \in A, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \right\}$$

*Remarque.* Si on ne travaille qu'en stratégies pures, on s'intéressera plutôt à  $\mathbf{Nash}^p(G)$  l'ensemble des équilibres purs.

$$\mathbf{Nash}^p(G) = \left\{ c^* \in \prod_{i \in A} C_i \mid \forall i \in A, \forall c_i \in C_i \quad u_i(c_{-i}^*, c_i) \leq u_i(c_{-i}^*, c_i^*) \right\}$$

## 1.3.1 Méthodes générales de calcul

En toute généralité le calcul d'un équilibre de Nash est un problème difficile. Nous nous contenterons d'évoquer les éléments conduisant aux méthodes les plus fondamentales. Le calcul d'un équilibre de Nash peut être séparé en plusieurs questions :

- trouver un équilibre de Nash ;
- trouver un ou plusieurs équilibres en stratégies pures, s'ils existent ;
- trouver un ou plusieurs équilibres en stratégies mixtes ;
- trouver tous les équilibres de Nash.

La liste de ces questions n'est pas exhaustive et fait appel à des méthodes algorithmiques différentes qui varient aussi en fonction des caractéristiques des jeux. Il s'agit d'un domaine de recherche actif qu'il nous semble impossible de couvrir exhaustivement. Le lecteur intéressé peut se référer au travaux de McKelvey et McLennan dans [MM96]. Nous donnons ici les principes élémentaires qui permettent de décrire le calcul des équilibres de Nash. Ce calcul se fonde sur deux notions principales : la notion de *meilleure réponse* et la notion de *jeu réduit par suppression des stratégies fortement dominées*.

## Meilleure réponse

Une meilleure réponse d'un joueur à une configuration donnée consiste en la stratégie maximisant le gain de ce joueur. Formellement, une meilleure réponse se définit de la manière suivante :

## DÉFINITION 1.8 (MEILLEURE RÉPONSE)

Soient  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique et  $i \in A$  un joueur. Soit  $\sigma_{-i} \in \prod_{j \in A-i} \Delta(C_j)$ , une configuration mixte pour les joueurs différents de  $i$ . La stratégie  $\sigma_i^* \in \Delta(C_i)$  du joueur  $i$  est une meilleure réponse en stratégies mixtes à  $\sigma_{-i}$  si, et seulement si :

$$\forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^*)$$

*Remarque.* Si on ne travaille qu'en stratégies pures, une meilleure réponse  $c_i^* \in C_i$  du joueur  $i$  à une configuration  $c_{-i} \in \prod_{j \in A - \{i\}} C_j$  vérifie :  $\forall c_i \in C_i \quad u_i(c_{-i}, c_i) \leq u_i(c_{-i}, c_i^*)$

Clairement, une meilleure réponse possède un gain maximal pour une configuration donnée des stratégies des joueurs adverses. On définit alors  $\beta_i$  qui recherche l'ensemble des meilleures réponses d'un joueur  $i \in A$ .

**DÉFINITION 1.9 (ENSEMBLE DES MEILLEURES RÉPONSES)**

Soient  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu et  $i \in A$  un joueur. La fonction  $\beta_i$  calcule l'ensemble des meilleures réponses du joueur  $i$  aux stratégies des joueurs adverses :

$$\beta_i : \prod_{j \in A - i} \Delta(C_j) \rightarrow 2^{C_i}$$

$$\sigma_{-i} \mapsto \{ \sigma_i^* \in \Delta(C_i) \mid \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^*) \}$$

Autrement dit :

$$\beta_i(\sigma_{-i}) = \operatorname{argmax}_{\sigma_i \in \Delta(C_i)} \{ \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \}$$

*Remarque.* Si on travaille en stratégies pures, on s'intéressera plutôt à  $\beta_i^p$  l'ensemble des meilleures réponses de joueur  $i$  en stratégies pures.

$$\forall \sigma_{-i} \in \prod_{j \in A - \{i\}} \Delta(C_j) \quad \beta_i^p(\sigma_{-i}) = \{ c_i^* \in C_i \mid \forall c_i \in C_i \quad \pi_i(\sigma_{-i}, c_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}, c_i^*) \}$$

$$= \operatorname{argmax}_{c_i \in C_i} \{ \pi_i(\sigma_{-i}, c_i) \}$$

L'équilibre de Nash peut alors se formuler différemment en s'appuyant sur la notion de meilleure réponse. Chaque stratégie est une meilleure réponse aux autres stratégies décrites dans cette configuration définissant l'équilibre.

**PROPOSITION 1.1 (ÉQUILIBRE DE NASH  $\equiv$  MEILLEURE RÉPONSE)**

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Soit  $\sigma^* \in \Delta(C)$  une configuration mixte.  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash si et seulement si toute stratégie choisie pour l'équilibre est une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs :

$$\forall i \in A \quad \sigma_i^* \in \beta_i(\sigma_{-i}^*)$$

PREUVE. La preuve de cette proposition est donnée dans l'annexe D, page 143. ■

### Stratégie fortement dominée et jeux réduits

La recherche d'un équilibre de Nash s'attache à trouver pour chaque joueur une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs. Habituellement, la première étape lors du calcul des équilibres de Nash d'un jeu consiste à *réduire le jeu*, c'est-à-dire supprimer les stratégies qui ne seront jamais jouées, i.e. les *stratégies fortement dominées*.

**DÉFINITION 1.10 (STRATÉGIE FORTEMENT DOMINÉE)**

Soient  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, et  $i \in A$  un joueur. Une stratégie fortement dominée pour le joueur  $i$  est une stratégie pure  $c_i \in C_i$  ayant la propriété suivante :

$$\exists \sigma_i \in \Delta(C_i), \quad \forall c_{-i} \in \prod_{j \in A - i} C_j \quad u_i(c_{-i}, c_i) < \pi_i(c_{-i}, \sigma_i)$$

*Remarque.* Ici, on cherche à dominer la stratégie pure  $c_i$  par la stratégie mixte  $\sigma_i$ . Puisqu'une stratégie pure peut s'exprimer sous forme de stratégie mixte, une stratégie pure peut en dominer une autre. La propriété de forte domination s'exprime alors plus simplement sous la forme :

$$\exists c'_i \in C_i, \quad \forall c_{-i} \in \prod_{j \in A-i} C_j \quad u_i(c_{-i}, c_i) < u_i(c_{-i}, c'_i)$$

Autrement dit, une stratégie  $c_i$  est fortement dominée si quelles que soient les stratégies adverses,  $c_i$  admet un gain strictement inférieur au gain offert par une stratégie (mixte ou pure)  $\sigma_i$ . Le joueur  $i$  n'a donc aucun intérêt à choisir cette stratégie s'il veut maximiser son gain.

Une fois que les stratégies fortement dominées d'un joueur ont été supprimées, on peut recommencer avec un autre joueur. Lorsque tous les joueurs ont été traités, certaines des stratégies des joueurs précédents peuvent devenir alors fortement dominées. Un jeu où l'on aurait supprimé toutes les stratégies fortement dominées, de manière récursive et jusqu'à atteindre un point fixe, est appelé *jeu réduit*. La recherche des équilibres de Nash s'effectue sur les jeux réduits. L'exemple 1.5 présente la réduction des jeux de l'exemple 1.1.

#### EXEMPLE 1.5 (RÉDUCTION DES JEUX DE L'EXEMPLE 1.1)

Considérons les jeux de l'exemple 1.1 détaillés dans le tableau 1.1. Rappelons ici la table de gain du jeu (a) :

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	(3, 2)	(2, 1)
$O_R$	(0, 0)	(1, 3)

On remarque en particulier que  $u_R(T_R, T_J) > u_R(O_R, T_J)$  et  $u_R(T_R, O_J) > u_R(O_R, O_J)$ . Autrement dit la stratégie pure  $O_R$  est fortement dominée par la stratégie pure  $T_R$ . C'est d'ailleurs la seule à cette étape. La suppression de la stratégie  $O_R$  nous donne alors le jeu suivant :

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	(3, 2)	(2, 1)

Dans ce jeu, on peut se rendre compte que  $u_J(T_R, T_J) > u_J(T_R, O_J)$ . La stratégie  $O_J$  est donc fortement dominée. De fait, si on la supprime il ne nous reste que la configuration  $(T_R, T_J)$ .

$R/J$	$T_J$
$T_R$	(3, 2)

Puisque nous sommes certains qu'un équilibre de Nash existe (au moins au stratégie mixte), et qu'il ne reste qu'une seule configuration, alors  $(T_R, T_J)$  est équilibre de Nash.

Dans le cas des jeux (c) et (d), la réduction nous permet également de calculer directement les équilibres de Nash :  $(T_R, O_J)$  pour le jeu (c) et  $(O_R, O_J)$  pour le jeu (d). Le jeu (b) est déjà sous forme réduite :  $u_R(T_R, T_J) > u_R(O_R, T_J)$  mais  $u_R(T_R, O_J) < u_R(O_R, O_J)$ , donc  $T_R$  et  $O_R$  ne sont pas fortement dominées ; de même  $u_J(T_R, T_J) > u_J(T_R, O_J)$  mais  $u_J(O_R, T_J) < u_J(O_R, O_J)$ .

### 1.3.2 Calcul des équilibres purs

Dans le cas où l'on recherche des équilibres purs, la définition 1.6 s'exprime de la manière suivante :

## DÉFINITION 1.11 (ÉQUILIBRES DE NASH PURS)

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, soit  $c^* \in \prod_{i \in A} C_i$  une configuration pure.  $c^*$  est un équilibre de Nash pur si et seulement si :

$$\forall i \in A, \quad \forall c_i \in C_i \quad u_i(c_{-i}^*, c_i) \leq u_i(c_{-i}^*, c_i^*)$$

Le calcul des équilibres de Nash purs peut se fonder sur la recherche de meilleures réponses, en utilisant la proposition 1.1. Étant donné un agent, cette méthode examine toutes les configurations possibles de stratégies pures des autres joueurs et détermine pour chacune la stratégie jouée par l'agent. Les équilibres de Nash sont les configurations qui se situent à l'intersection des meilleures réponses de chacun des agents.

## PROPOSITION 1.2 (ÉQUILIBRES DE NASH PURS)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. L'ensemble des équilibres de Nash purs peut être calculé ainsi :

$$\bigcap_{i \in A} \bigcup_{\substack{c_{-i} \in \prod_{j \in A-i} C_j \\ c_i \in \beta_i^p(c_{-i})}} (c_{-i}, c_i)$$

L'exemple 1.6 suivant présente ce calcul dans le cas des jeux à deux joueurs de l'exemple 1.1.

## EXEMPLE 1.6 (CALCUL DES ÉQUILIBRES DE NASH PURS DU JEU (b) DU TABLEAU 1.1)

Rappelons ici la table de gains du jeu (b).

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	(3, 2)	(1, 1)
$O_R$	(0, 0)	(2, 3)

Puisque  $u_R(T_R, T_J) > u_R(O_R, T_J)$ , on a  $T_R \in \beta_R^p(T_J)$  et même  $\beta_R^p(T_J) = \{T_R\}$ . De même, puisque  $u_R(T_R, O_J) < u_R(O_R, O_J)$ , on a  $\beta_R^p(O_J) = \{O_R\}$ .

De la même manière pour Juliette,  $\beta_J^p(T_R) = \{T_J\}$  et  $\beta_J^p(O_R) = \{O_J\}$ .

L'intersection des configurations nous donne alors  $\mathbf{Nash}_b^p$  l'ensemble des équilibres de Nash purs du jeu b) :

$$\mathbf{Nash}_b^p = \{(T_R, T_J), (O_R, O_J)\}$$

Graphiquement, on peut représenter ce calcul en mettant un  $\blacktriangleleft$  dans les cases du tableau correspondant à une meilleure réponse pour Roméo, et un  $\blacktriangleright$  dans celle correspondant à une meilleure réponse pour Juliette. Les cases contenant à la fois un  $\blacktriangleleft$  et un  $\blacktriangleright$  correspondent à un équilibre de Nash.

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	$\blacktriangleleft$ (3, 2) $\blacktriangleright$	(1, 1)
$O_R$	(0, 0)	$\blacktriangleleft$ (2, 3) $\blacktriangleright$

**Existence.** Nous avons vu (théorème 1.1) que l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes est certaine. Si l'on se restreint aux équilibres de Nash purs, il existe des jeux qui n'en possèdent pas. L'exemple 1.7 suivant exhibe un tel jeu.

## EXEMPLE 1.7 (ROMÉO SANS JULIETTE)

Dans cette version, Roméo ne veut plus être avec Juliette mais Juliette tient à être avec Roméo. Un gain de 1 est donc attribué à Roméo s'il est au théâtre ou à l'opéra sans Juliette, un gain de 0 sinon. Les gains sont inversés pour Juliette : 0 si elle est au théâtre ou à l'opéra avec Roméo, et 1 sinon.

Intuitivement, ce jeu ne peut pas conduire à un consensus incarné par un équilibre de Nash pur car chaque partenaire a intérêt à changer son choix en fonction de celui de l'autre (si Roméo décide d'aller au théâtre, Juliette l'y accompagnera mais dans ce cas Roméo voudra aller à l'opéra, etc.) ; ce qui dans le jeu conduit à bouger de manière unilatérale vers une autre stratégie afin d'augmenter son gain.

Sous forme de tableau de gains, le jeu est le suivant (où les ◀ marquent une configuration de meilleure réponse pour Roméo, et les ▶ une meilleure réponse pour Juliette) :

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	$(0, 1) \blacktriangleright$	$\blacktriangleleft (1, 0)$
$O_R$	$\blacktriangleleft (1, 0)$	$(0, 1) \blacktriangleright$

Nous voyons alors que l'intersection des meilleures réponses de Roméo et Juliette est vide, il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures, ce qui confirme notre intuition.

**Importance des gains.** La recherche des équilibre de Nash purs se fonde sur le principe de meilleure réponse. La valeur intrinsèque des gains n'est pas importante en soit. Pour un joueur  $i$  donné, seul l'ordre des gains  $u_i(c_{-i}, c_i)$  à  $c_{-i}$  fixé, influencera les équilibres.

### 1.3.3 Calcul des équilibres mixtes

Pour les stratégies mixtes, le calcul est plus complexe et différentes méthodes ont été proposées dans la littérature. Le lemme suivant, déduit de la proposition 1.1 sur l'équivalence entre meilleure réponse et équilibre de Nash, fonde une méthode exacte et classique de calcul des équilibres mixtes.

LEMME 1.1 (ÉGALITÉ DES GAINS)

Soient  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique,  $\sigma^* = (\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \in \mathbf{Nash}(G)$  un équilibre de Nash mixte. Alors :

$$\forall i \in A, \forall (k, k') \in [1 : m_i]^2 \quad \left( (\sigma_i^*[c_i^k] \neq 0 \wedge \sigma_i^*[c_i^{k'}] \neq 0) \Rightarrow \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^k) = \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^{k'}) \right)$$

PREUVE. La preuve de ce lemme est proposée dans l'annexe D, page 143. ■

Ce lemme signifie que si la stratégie mixte  $\sigma_i$  du joueur  $i$  correspond à une indécision de sa part entre ses stratégies pures  $c_i^k$  et  $c_i^{k'}$ , alors les deux stratégies pures doivent lui apporter le même gain. En effet, si l'une des deux stratégies apportait un gain supérieur à l'autre, le joueur  $i$  aurait tout intérêt à choisir la stratégie qui lui rapporte le plus.

Grâce à ce lemme, le calcul des équilibres mixtes de Nash d'un jeu  $\langle A, C, u \rangle$  peut se formuler comme un système d'équations et d'inéquations où les variables sont les  $\sigma_i(c_i)$  pour  $i \in A$  et  $c_i \in C_i$ . Afin d'exhiber ce système d'équations, il convient tout d'abord de déterminer entre quelles stratégies chaque joueur est indécis. Autrement dit, déterminer pour chaque joueur quelles sont les stratégies pures qui auront une probabilité non nulle. Ces stratégies sont appelées *support de la stratégie mixte*.

DÉFINITION 1.12 (SUPPORT D'UNE STRATÉGIE MIXTE)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Soit  $i \in A$  un joueur et  $\sigma_i \in \Delta(C_i)$  une de ses stratégies mixtes. On appelle support de  $\sigma_i$  l'ensemble noté  $D_i(\sigma_i)$  et défini par :

$$D_i(\sigma_i) = \{c_i \in C_i \mid \sigma_i[c_i] \neq 0\}$$

À l'aide de la définition du support, on peut exprimer la recherche des équilibres de Nash mixtes d'un jeu  $\langle A, C, u \rangle$  par la résolution du système d'équations suivant :

**DÉFINITION 1.13 (SYSTÈME D'ÉQUATIONS)**

Soient  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu,  $\sigma \in \Delta(C)$  une configuration mixte.  $\sigma$  est un équilibre de Nash mixte si et seulement si  $\sigma$  est solution du système d'équations suivant :

$$\forall i \in A \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i(c_i) = 0 & \forall c_i \in C_i - D_i(\sigma) \\ \sigma_i(d_i) \geq 0 & \forall d_i \in D_i(\sigma) \\ \sigma_i(d_i) \leq 1 & \forall d_i \in D_i(\sigma) \\ \sum_{c_i \in C_i} \sigma_i(c_i) = 1 & \\ \pi_i(\sigma_{-i}, d_i) = \pi_i(\sigma_{-i}, d'_i) & \forall (d_i, d'_i) \in D_i(\sigma)^2 \\ \pi_i(\sigma_{-i}, d_i) \geq \pi_i(\sigma_{-i}, c_i) & \forall (d_i, c_i) \in D_i(\sigma) \times C_i - D_i(\sigma) \end{array} \right.$$

**Importance des gains.** Au contraire des équilibres purs, la valeur des gains est primordiale dans la recherche des équilibres mixtes. En effet, les gains purs apparaissent en tant que coefficients des probabilités des stratégies mixtes dans le système d'équations précédent. Lors de la résolution du système, la valeur des gains va donc conditionner le résultat, *i.e.* la valeur de l'équilibre de Nash mixte.

**Complexité.** En toute généralité ce système n'est pas linéaire à cause du produit des variables (dans le calcul des gains  $\pi_i$ ). Dans le cas d'un jeu à  $n$  joueurs, les équations sont de degré  $n - 1$ .

De plus, la résolution du système présuppose la connaissance du support de chaque agent. Il faut donc résoudre un système pour chaque support existant. Dans le cas d'un agent ayant  $m$  stratégie, le nombre de supports différents est de l'ordre de  $2^m$

Ces grandeurs prises en considérations font que la recherche des équilibres de Nash en stratégies mixtes est un problème NP-Complet. L'exemple 1.8 suivant, propose de détailler la recherche des équilibres de Nash mixtes, pour un jeu à deux joueurs (le système est alors linéaire) ayant respectivement deux et trois stratégies (et donc quatre supports à étudier).

**EXEMPLE 1.8**

Considérons le jeu entre Roméo et Juliette, où Juliette a maintenant la possibilité d'aller au cinéma. Le tableau suivant résume les gains des deux joueurs.

R/J	T <sub>J</sub>	O <sub>J</sub>	C <sub>J</sub>
T <sub>R</sub>	(7, 2)	(2, 7)	(3, 6)
O <sub>R</sub>	(2, 7)	(7, 2)	(4, 5)

La première chose que l'on peut remarquer est qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash pur dans ce jeu.

Soit  $\sigma$  un équilibre de Nash mixte. Il existe alors quatre supports différents pour Juliette : soit Juliette est en indécision sur ses trois stratégies et  $D_J(\sigma) = \{T_J, O_J, C_J\}$  ; soit Juliette hésite entre l'opéra et le cinéma,  $D_J(\sigma) = \{O_J, C_J\}$  ; soit Juliette hésite entre le théâtre et l'opéra,  $D_J(\sigma) = \{T_J, O_J\}$  ; soit enfin Juliette hésite entre le théâtre et le cinéma,  $D_J(\sigma) = \{T_J, C_J\}$ . Le support de Roméo est  $D_R(\sigma) = \{T_R, O_R\}$ .

**Cas 1 : Théâtre, Opéra ou Cinéma ?** Pour que Roméo soit indécis entre ses deux stratégies, ses gains doivent être identiques si l'on considère les stratégies pures :  $\pi_R(T_R, \sigma_J) = \pi_R(O_R, \sigma_J)$ . Autrement dit :

$$7 \times \sigma_J[T_J] + 2 \times \sigma_J[O_J] + 3 \times \sigma_J[C_J] = 2 \times \sigma_J[T_J] + 7 \times \sigma_J[O_J] + 4 \times \sigma_J[C_J]$$

Pour que Juliette soit indécise entre ses trois stratégies, les gains espérés lorsqu'elle joue ses stratégies purs doivent être égaux :  $\pi_J(T_J, \sigma_R) = \pi_J(O_J, \sigma_R) = \pi_J(C_J, \sigma_R)$ . Soit :

$$2 \times \sigma_R[T_R] + 7 \times \sigma_R[O_R] = 7 \times \sigma_R[T_R] + 2 \times \sigma_R[O_R] = 3 \times \sigma_R[T_R] + 4 \times \sigma_R[O_R]$$

En sachant que  $\sigma_R[T_R] + \sigma_R[O_R] = 1$ , ce système n'admet pas de solution.

Il n'y a donc pas d'équilibre de Nash où Juliette hésite entre ses trois stratégies.

**Cas 2 : Opéra ou Cinéma ?** Dans ce cas où Juliette hésite en opéra et cinéma, le système devient, en ce qui concerne les gains :

$$\begin{cases} \pi_R(T_R, \sigma_J) = \pi_R(O_R, \sigma_J) \\ \pi_J(O_J, \sigma_R) = \pi_J(C_J, \sigma_R) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 2 \times \sigma_J[O_J] + 3 \times \sigma_J[C_J] = 7 \times \sigma_J[O_J] + 4 \times \sigma_J[C_J] \\ 7 \times \sigma_R[T_R] + 2 \times \sigma_R[O_R] = 3 \times \sigma_R[T_R] + 4 \times \sigma_R[O_R] \end{cases}$$

La résolution mathématique du système des gains donne une unique solution où  $\sigma_J[O_J] = -\frac{1}{4}$ , qui n'est pas acceptable (on ne peut pas avoir de probabilité négative).

Il n'y a donc pas d'équilibre de Nash où Juliette hésite entre l'opéra et le cinéma.

**Cas 3 : Théâtre ou Opéra ?** Dans ce cas là, le système devient, en ce qui concerne les gains :

$$\begin{cases} \pi_R(T_R, \sigma_J) = \pi_R(O_R, \sigma_J) \\ \pi_J(T_J, \sigma_R) = \pi_J(O_J, \sigma_R) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 7 \times \sigma_J[T_J] + 2 \times \sigma_J[O_J] = 2 \times \sigma_J[O_J] + 7 \times \sigma_J[C_J] \\ 2 \times \sigma_R[T_R] + 7 \times \sigma_R[O_R] = 7 \times \sigma_R[T_R] + 2 \times \sigma_R[O_R] \end{cases}$$

Le système admet une unique solution,  $\sigma = (\sigma_R, \sigma_J)$  avec  $\sigma_R = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $\sigma_J = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Les joueurs espèrent gagner  $\pi_R(\sigma) = \pi_J(\sigma) = \frac{9}{2}$ .

Cependant, Si Juliette avait décidé d'aller au cinéma, son gain aurait été  $\pi_J(C_J, \sigma_R) = 6 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2} > \pi_J(\sigma)$ . Autrement dit, en changeant seule de stratégie, Juliette peut améliorer son gain. Nous ne sommes donc pas en situation d'équilibre de Nash.

**Cas 4 : Théâtre ou Cinéma ?** D'après le théorème 1.1 d'existence d'un équilibre de Nash, on est certain que le système du cas 4 admet une solution, puisque aucun des autres n'en admet. Si Juliette hésite entre théâtre et cinéma, le système devient, en ce qui concerne les gains :

$$\begin{cases} \pi_R(T_R, \sigma_J) = \pi_R(O_R, \sigma_J) \\ \pi_J(T_J, \sigma_R) = \pi_J(C_J, \sigma_R) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 7 \times \sigma_J[T_J] + 3 \times \sigma_J[C_J] = 2 \times \sigma_J[O_J] + 4 \times \sigma_J[C_J] \\ 2 \times \sigma_R[T_R] + 7 \times \sigma_R[O_R] = 6 \times \sigma_R[T_R] + 5 \times \sigma_R[O_R] \end{cases}$$

Le système admet une unique solution, où  $\sigma_R = (\frac{1}{3}[T_R] + \frac{2}{3}[O_R])$  et  $\sigma_J = (\frac{1}{6}[T_J] + \frac{5}{6}[C_J])$  et les joueurs espèrent gagner  $\pi_R(\sigma) = \frac{11}{3}$  et  $\pi_J(\sigma) = \frac{16}{3}$ .

On peut alors vérifier que Juliette gagne plus ici qu'en allant à l'opéra :

$$\pi_J(O_J, \sigma_R) = 7 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{11}{3} < \frac{16}{3} = \pi_J(\sigma)$$

La configuration  $((\frac{1}{3}[T_R] + \frac{2}{3}[O_R]), (\frac{1}{6}[T_J] + \frac{5}{6}[C_J]))$  est équilibre de Nash.

## 1.4 Bilan

Dans ce chapitre nous avons détaillé une représentation des jeux non-coopératifs : les jeux stratégiques. Ces jeux se caractérisent par la donnée d'un ensemble de joueurs, des différentes stratégies accessibles pour chacun d'entre eux, et enfin d'une fonction de gains attribuant une récompense (un gain) à chaque joueur en fonction des différentes stratégies choisies par ces joueurs. Dans les jeux stratégiques, les joueurs jouent simultanément, en étant parfaitement informés des stratégies possibles des adversaires, et des gains associés.

L'extension mixte des jeux stratégiques permet de modéliser des phénomènes d'indécision de la part d'un joueur. En particulier, les stratégies mixtes d'un joueur se définissent par une distribution de probabilités sur l'espace de ses stratégies classiques, dites pures.

Un des points fondamentaux de la théorie des jeux est la recherche des équilibres de Nash, autrement dit des situations dans lesquelles chaque joueur est satisfait de la stratégie qu'il a choisie, au regard des stratégies choisies par ses adversaires. Dans le cadre des jeux stratégiques en stratégies pures, certains jeux n'admettent pas d'équilibre de Nash. Cependant si l'on se place dans le cadre de l'extension mixte, le théorème de Nash affirme qu'une situation d'équilibre existe toujours.

Nous avons finalement présenté une méthode de calcul des équilibres, soit en stratégies pures, soit en stratégies mixtes. Dans le cadre pur, la recherche des équilibres se fonde sur l'appartenance, pour chaque joueur, de la stratégie choisie à l'ensemble des meilleures stratégies qu'il aurait pu jouer. Dans le cadre mixte, la méthode de calcul cherche à résoudre un système d'équations qui affirme l'égalité des gains associés aux stratégies entre lesquelles le joueur est indécis.



## Chapitre 2

---

# INTERACTIONS LOCALES EN THÉORIE DES JEUX

---

---

<b>2.1</b>	<b>Dépendance</b> . . . . .	<b>34</b>
2.1.1	Critère de cible . . . . .	35
2.1.2	Critère de calcul . . . . .	36
<b>2.2</b>	<b>Dépendance d'actions</b> . . . . .	<b>38</b>
2.2.1	Dépendance d'actions par stratégies . . . . .	38
2.2.2	Dépendance d'actions par gains . . . . .	41
<b>2.3</b>	<b>Dépendance d'agents</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>2.4</b>	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>47</b>

---

*Dans ce chapitre nous dressons un état de l'art de la localité d'interaction en théorie des jeux.*

La théorie des jeux possède une *vision globale* des interactions qu'elle permet de modéliser. En effet dans un jeu stratégique chaque joueur joue contre tous les autres agents ; autrement dit chaque composant du système étudié (modélisé) est en interaction avec tous les autres. La notion de localité d'interaction étant essentielle pour l'étude et la modélisation des systèmes complexes biologiques ([SFK<sup>+</sup>05]), se pose alors la question de son intégration dans la théorie des jeux, théorie des interactions complexes par excellence.

L'intégration de la localité d'interaction en théorie des jeux couvre un domaine précis. Pour autant, *plusieurs notions de localité existent* et sont utilisées suivant les auteurs et les modèles proposés. Ces modèles se distinguent à la fois sur la méthode permettant de calculer la localité et sur la nature même de la localité exhibée.

La localité la plus connue, et historiquement la plus ancienne, est sans aucun doute la *localité spatiale dans les jeux répétés* (que nous détaillons dans l'annexe B). Cependant, notre intérêt se porte plus particulièrement sur un type de localité nettement moins étudiée, que nous qualifions de *localité interne*, au sens où elle permet de réorganiser un jeu stratégique afin de prendre en compte les interactions locales intrinsèques à ce jeu. Suivant les auteurs, les motivations pour

la prise en compte des interactions locales différent. Trois principaux domaines d'applications ressortent cependant.

- *Analyse*. Dans le cas de l'analyse du système, les auteurs s'attachent à mettre en avant des propriétés locales du système et à en étudier la modularité. Ils s'intéressent également à l'influence que peuvent avoir les propriétés locales, sur le comportement global du système.
- *Taille du modèle*. La localité est également utilisée en tant qu'« outil » permettant d'éviter la redondance d'informations dans le modèle. La localité permet de réduire la taille du modèle, tout en conservant l'ensemble de l'information du modèle d'origine. Cette approche est souvent présentée de paire avec les problèmes de complexité du calcul des équilibres de Nash.
- *Équilibres*. Le calcul des équilibres de Nash est une question centrale de la théorie des jeux. Certains auteurs s'attachent à utiliser la localité interne pour en diminuer la complexité, pour raffiner les équilibres de Nash, ou bien encore pour investiguer de nouvelles notions d'équilibres.

La suite du chapitre se structure de la manière suivante. Dans la section 2.1 nous étudions les représentations servant de support à la localité et que les auteurs définissent pour la modéliser. Ces supports que nous avons regroupés sous le terme de *dépendance* se distinguent par les éléments mis en relation (les agents ou les stratégies), et par les méthodes de calcul employées pour exhiber cette dépendance. La suite du chapitre s'intéresse plus en détails aux différents modèles.

La section 2.2 présente les modèles s'appuyant sur une dépendance d'actions calculée soit à partir des stratégies — section 2.2.1 avec les « *Multi-Agent Influence Diagrams* » de Koller et Milch — soit à partir des gains — section 2.2.2 avec les « *GNets* » de La Mura et les « *Action Graph Games* » de Bhat et Leyton-Brown.

Dans la section 2.3 nous nous intéressons aux modèles définissant une dépendance entre agents. Dans le modèle présenté — les « *Graphical Games* » de Kearns, Littman et Singh — la dépendance est calculée à partir des gains.

Enfin, la section 2.4 récapitule les spécificités de chaque modèle.

## 2.1 Dépendance

La notion de dépendance permet de décrire la localité d'interaction et unifie sous une notion unique différentes relations mettant en valeur cette localité. Informellement, elle caractérise une relation causale entre agents et/ou stratégies et définit leur influence sur les gains et/ou les stratégies des autres agents. Cette notion sous-tend la caractérisation d'interactions locales car deux agents qui ne sont pas en dépendance n'interagissent pas pour le résultat du jeu identifié par l'équilibre de Nash.

Nous avons distingué deux critères intervenant dans la définition de la dépendance :

- le *critère de cible* s'intéresse aux éléments (agents ou actions) reliés par la relation de dépendance,
- le *critère de calcul* porte sur la méthode employée pour calculer la dépendance (à partir des gains ou des stratégies).

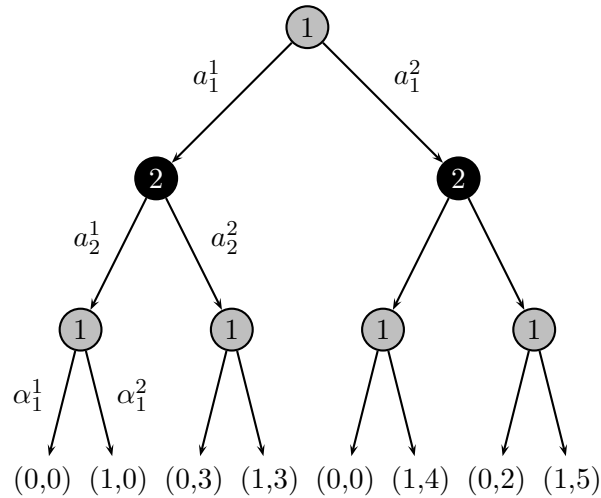


FIG. 2.1 – Un exemple de jeu sous forme extensive pour la dépendance d’actions

### 2.1.1 Critère de cible

Le critère de cible permet de déterminer quels sont les éléments reliés par la notion de dépendance : soient les actions que les joueurs peuvent effectuer — on parle alors de *dépendance d’actions* — soient les joueurs eux-mêmes — et on parle de *dépendance d’agents*.

#### Dépendance d’actions

La dépendance d’actions intervient principalement dans les jeux où les stratégies des joueurs sont constituées d’un ensemble d’actions. La figure 2.1 représente ainsi un jeu à deux joueurs sous forme extensive. Le joueur 1 joue en premier et a le choix entre deux actions  $a_1^1$  et  $a_1^2$ . Le joueur 2 peut alors jouer à son tour en choisissant entre  $a_2^1$  et  $a_2^2$ . Une fois que le joueur 2 a joué, c’est de nouveau au joueur 1 qui a cette fois le choix entre les actions  $\alpha_1^1$  et  $\alpha_1^2$ . Dans ce cas de figure, la distinction est faite entre action et stratégie. Une action est un choix local, à un des nœuds de l’arbre de décision. Une stratégie sera constituée d’un ensemble d’actions.

La dépendance d’actions s’intéresse alors à définir des relations entre les actions des joueurs, telles que de savoir si l’action  $a_1^1$  ou  $a_1^2$  influence le choix d’action du joueur 2. Elle permet entre autre la détermination des actions parmi lesquelles le joueur peut choisir, en fonction des actions déjà choisies, par lui ou les autres joueurs.

Les modèles utilisant la dépendance d’actions sont présentés plus en détails dans la section 2.2. Il s’agit des « *Multi-Agent Influence Diagrams* » de Koller et Milch, des « *GNets* » de La Mura et des « *Action Graph Games* » de Bhat et Leyton-Brown.

#### Dépendance d’agents

La dépendance d’agents étudie l’influence d’un agent sur le reste du jeu, plus précisément sur les autres joueurs. Elle répond à des questions telles que savoir si un joueur est influencé dans le choix de ses stratégies, ou dans l’attribution de ses gains, par un autre joueur. La dépendance d’agents autorise ainsi une vision plus globale que la dépendance d’actions.

Dans l’exemple de la figure 2.1, le joueur 2 joue après le joueur 1, pour autant, quelle que soit la stratégie  $a_1^1$  ou  $a_1^2$  du joueur 1 le joueur 2 jouera sa stratégie  $a_2^2$  s’il veut maximiser son

gain. Le joueur 2 ne dépend donc pas du joueur 1.

Le modèle de Kearns, les « *Graphical Games* », utilise une dépendance d'agents. Il est présenté dans la section 2.3.

### 2.1.2 Critère de calcul

Le critère de calcul s'intéresse à la méthode utilisée pour calculer la dépendance. En effet, étant donné un joueur  $i$ , l'influence des autres agents sur celui-ci, *i.e.* la dépendance de  $i$  envers ces autres agents, peut être étudiée soit en analysant quelles sont les stratégies jouées par  $i$  — on parle de *dépendance par stratégies* — soit en regardant les gains de  $i$  — on parle alors de *dépendance par gains*.

Dans la suite, afin d'illustrer les deux méthodes de calcul, on se placera dans le cas d'une dépendance d'agents.

#### Dépendance par stratégies

La *dépendance par stratégies* est calculée en recherchant la meilleure stratégie à jouer en fonction des stratégies des autres joueurs. Informellement, dans le cas d'une dépendance d'agents, un joueur  $j$  dépend d'un joueur  $i$  si  $j$  a besoin de connaître la stratégie jouée par  $i$  pour déterminer quelle est la *meilleure stratégie à jouer*. L'exemple 2.1 suivant illustre cette notion.

##### EXEMPLE 2.1 (DÉPENDANCE PAR STRATÉGIES)

Considérons le jeu stratégique à deux joueurs dont la représentation sous forme de table est la suivante :

1/2	$c_2^1$	$c_2^2$
$c_1^1$	(0, 1)	(2, 0)
$c_1^2$	(1, 0)	(3, 1)

Si le joueur 2 joue sa stratégie  $c_2^1$ , le joueur 1 jouera sa stratégie  $c_1^1$  afin de maximiser son gain (il gagne ainsi 1, alors qu'il aurait gagné 0 s'il avait joué sa stratégie  $c_1^2$ ). De la même façon, si le joueur 2 joue  $c_2^2$ , le joueur 1 jouera  $c_1^2$  (pour gagner 3 plutôt que 2). Donc quelque soit la stratégie jouée par le joueur 2, le joueur 1 jouera  $c_1^2$ . Le joueur 2 n'influence donc pas la stratégie jouée par le joueur 1 ; le joueur 1 est indépendant stratégiquement du joueur 2.

Si le joueur 1 joue sa stratégie  $c_1^1$ , le joueur 2 jouera sa stratégie  $c_2^1$  afin de maximiser son gain (il gagne ainsi 1, alors qu'il aurait gagné 0 s'il avait joué sa stratégie  $c_2^2$ ). Si le joueur 1 joue  $c_1^2$ , le joueur 2 jouera  $c_2^2$ . La meilleure stratégie à jouer pour le joueur 2 étant donné la stratégie du joueur 1 dépend donc de la stratégie du joueur 1. On dit alors que le joueur 2 dépend stratégiquement du joueur 1.

La définition formelle de la dépendance d'agents par stratégies est la suivante :

##### DÉFINITION 2.1 (DÉPENDANCE D'AGENTS PAR STRATÉGIES)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu. Étant donnés  $(i, j) \in A^2$ , deux joueurs, on note  $i\delta_s j$  la relation de dépendance stratégique de  $j$  envers  $i$  (autrement dit l'influence de  $i$  sur  $j$ ) :

$$\forall (i, j) \in A^2 \quad \left( i\delta_s j \Leftrightarrow \exists c_{-\{i,j\}} \in \prod_{k \in A - \{i,j\}} C_k, \exists (c_i, c'_i) \in C_i \quad \beta_j^p(c_{-\{i,j\}}, c_i) \neq \beta_j^p(c_{-\{i,j\}}, c'_i) \right)$$

avec  $\beta_j^p$  la fonction de meilleure réponse en stratégie pure du joueur  $j$  (définition 1.8, page 25).

*Remarque.* Il convient de rapprocher la dépendance d'agents par stratégies de la notion de domination vue dans le chapitre précédent. En effet, si le joueur  $j$  ne dépend pas du joueur  $i$ , les meilleures réponses de  $j$  seront les mêmes quelle que soit la stratégie de  $i$ . Pour autant, les meilleures réponses de  $j$  ne dominent pas nécessairement ses stratégies non meilleures réponses (dans l'exemple précédent,  $c_1^2$  domine fortement  $c_1^1$ ).

Autrement dit, dans un jeu sous forme réduite (où toutes les stratégies fortement dominées ont été supprimées), les agents ne sont pas nécessairement dépendants. Dans la table de gains suivante le jeu est sous forme réduite, et pourtant,  $2 \delta_s 1$ .

1/2	$c_2^1$	$c_2^2$
$c_1^1$	(1, 1)	(3, 0)
$c_1^2$	(1, 0)	(3, 1)

La dépendance par stratégies est utilisée, dans le cadre d'une dépendance d'actions, par Koller et Milch, dans les « *Multi-Agent Influence Diagrams* » (section 2.2.1).

### Dépendance par gains

La *dépendance par gains* est calculée en étudiant les gains d'un agent. Informellement, dans le cas d'une dépendance d'agents, un joueur  $j$  dépend par gains d'un joueur  $i$  ( $i\delta_u j$ ) si  $j$  a besoin de connaître la stratégie jouée par  $i$  pour déterminer son gain.

#### DÉFINITION 2.2 (DÉPENDANCE D'AGENT PAR GAINS)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Étant donnés  $(i, j) \in A^2$ , deux joueurs, on note  $i\delta_u j$  la relation de dépendance par gains de  $j$  envers  $i$  :

$$\forall (i, j) \in A^2 \quad \left( i\delta_u j \Leftrightarrow \exists (c_i, c'_i) \in C_i^2, \exists c_{-i} \in C_{-i} \quad u_j(c_{-i}, c_i) \neq u_j(c_{-i}, c'_i) \right)$$

#### EXEMPLE 2.2 (DÉPENDANCE PAR GAINS)

Considérons la table de gains suivante.

1/2	$c_2^1$	$c_2^2$
$c_1^1$	(0, 1)	(0, 0)
$c_1^2$	(1, 0)	(1, 1)

Quelle que soit la stratégie jouée par le joueur 2, si le joueur 1 joue  $c_1^1$  il obtient un gain de 0, et un gain de 1 s'il joue  $c_1^2$ . Donc le joueur 1 ne dépend pas par gains du joueur 2.

Si le joueur 2 joue sa stratégie  $c_2^1$ , il gagne 1 si le joueur 1 joue  $c_1^1$ , et 0 si le joueur 1 joue  $c_1^2$ . Donc le joueur 2 dépend pour ses gains du joueur 1.

La dépendance par gains est utilisée d'une part par La Mura dans les « *GNets* » et par Bhat et Leyton-Brown dans les « *Action Graph Games* » (dépendance d'action, section 2.2.2), et d'autre part par Kearns, Littman et Singh dans les « *Graphical Games* » (dépendance d'agent, section 2.3).

### Relations entre dépendance par gains et dépendance par stratégies

La dépendance par stratégies permet de capturer les agents qui influencent un joueur au niveau de ses choix. Le joueur doit savoir ce que font les agents (connaître leurs stratégies) avant de pouvoir décider quoi faire (quelle stratégie choisir).

La dépendance par gains est une notion plus précise, au sens où elle s'intéresse à ce que gagne le joueur, et non plus à ce qu'il doit jouer pour maximiser son gain.

Ainsi, il n'existe pas d'équivalence entre ces deux notions. La dépendance par gains caractérise un changement de gain en fonction d'un changement de stratégie du joueur à l'origine de la dépendance. Or cette modification n'entraîne pas nécessairement une modification du choix final de la stratégie jouée, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.3 ( $i\delta_u j \not\Rightarrow i\delta_s j$ )

Considérons la table de gains suivante décrivant un jeu à deux joueurs.

1/2	$c_2^1$	$c_2^2$
$c_1^1$	(0, 0)	(1, 1)
$c_1^2$	(1, 0)	(2, 2)

Puisque  $u_2(c_1^1, c_2^1) \neq u_2(c_1^2, c_2^1)$  on déduit que  $1\delta_u 2$ . Cependant,  $\beta_2^p(c_1^1) = \{c_2^2\} = \beta_2^p(c_1^2)$ , et donc  $1 \not\delta_s 2$ .

Cependant, la dépendance par stratégies implique la dépendance par gains comme l'exprime le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1 ( $\delta_s \Rightarrow \delta_u$ )

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, alors :

$$\forall (i, j) \in A^2 \quad \left( i\delta_s j \Rightarrow i\delta_u j \right)$$

PREUVE. La preuve de ce théorème est donné dans l'annexe D, page 144. ■

## 2.2 Dépendance d'actions

Dans cette section nous nous intéressons aux modèles définissant une dépendance d'actions. La section 2.2.1 présente les « *Multi-Agent Influence Diagrams* » de Koller et Milch où une dépendance d'actions par stratégies est utilisée. Dans la section 2.2.2, c'est une notion de dépendance d'actions par gains qui est définie par La Mura dans les « *GNets* » et par Bhat et Leyton-Brown dans les « *Action Graph Games* ». Après avoir présenté le contexte d'application, nous nous intéressons à la définition du modèle. Un exemple canonique est alors présenté avant d'étudier la manière dont les auteurs prennent en compte la localité et les dépendances, en particulier dans le cadre de la recherche d'équilibres.

### 2.2.1 Dépendance d'actions par stratégies

Le modèle présenté ici, les « *Multi-Agent Influence Diagrams* » de Koller et Milch, s'intéresse à une définition stratégique de la dépendance.

#### « *Multi-Agent Influence Diagrams* » (Koller et Milch)

**Contexte.** Dans [KM01, KM03], Daphne Koller et Brian Milch proposent les « *Multi-Agent Influence Diagrams* », ou MAIDs. Les MAIDs modélisent des jeux non coopératifs, et étendent les modèles graphiques probabilistes (réseaux bayésiens) et les diagrammes d'influence.

- Les *réseaux bayésiens*, et plus généralement les modèles graphiques probabilistes, sont des techniques de représentation utilisées en théorie de la décision. Ils représentent le monde au travers un ensemble de variables, pouvant prendre certaines valeurs (discrètes ou continues). Chaque état possible du monde est représenté par l'attribution d'une valeur à chacune des variables. Les relations entre les variables sont représentées par un graphe. Dans ce graphe, les relations de cause à effet ne sont pas déterministes mais probabilistes : une cause n'implique pas systématiquement un effet, mais indique simplement une probabilité qu'il arrive.
- Les *diagrammes d'influence* étendent les réseaux bayésiens en considérant un agent (et un seul) devant prendre des décisions en accord avec ses préférences. Les diagrammes d'influence ajoutent ainsi au réseaux bayésiens des variables de décision et des variables de gain représentant les choix et les préférences de l'agent.

Les MAIDS étendent les diagrammes d'influence en considérant la possibilité que *plusieurs agents* prennent des décisions, se caractérisant par un choix à faire entre différentes actions. Les MAIDS ont pour but de capturer explicitement la structure d'un jeu, *i.e.* de déterminer quelles sont les *variables* du jeu et d'organiser ces variables en définissent une relation de dépendance entre elles, la *pertinence stratégique* (« *strategic relevance* »). Koller et Milch proposent un critère graphique pour calculer cette dépendance qui permet de décomposer un jeu de départ en un ensemble de jeu plus petits et de calculer les équilibres de Nash du jeu initial à partir des équilibres de Nash des petits jeux.

**Modèle.** Dans les MAIDS plusieurs agents prennent des décisions. Celles-ci se caractérisent, pour un agent, par un choix à faire entre plusieurs actions ; de plus un agent peut avoir à prendre plusieurs décisions.

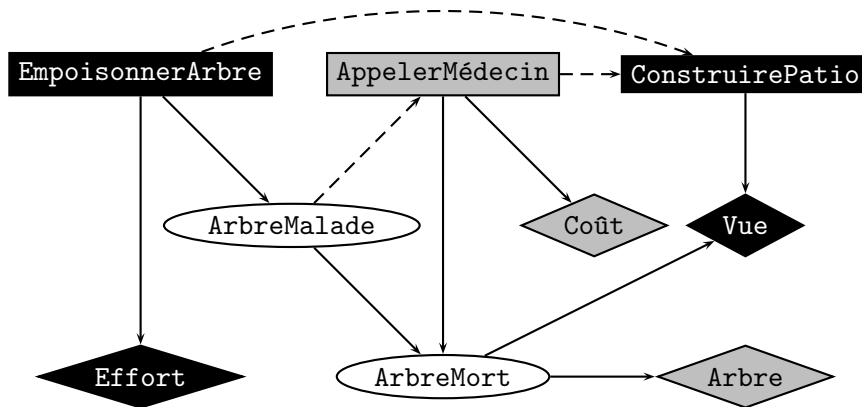
Un MAID se représente par un graphe contenant trois types de nœuds, *i.e.* trois types de variables, décrivant le monde sur lequel peuvent agir les agents.

- Les *variables de chance* (sous forme d'ovales) correspondent aux décisions de la nature, *i.e.* des décisions sur lesquelles les agents n'ont pas d'influence.
- Les *variables de décision* (sous forme de rectangles) décrivent les situations où un agent doit faire un choix. À chaque variable de décision sont donc associées les actions parmi lesquelles un agent peut choisir et à un agent peuvent être associées plusieurs variables de décision.
- Les *variables de gain* (sous forme de losanges) décrivent les gains des agents. La décomposition des gains est ici additive, autrement dit, le gain total d'un agent équivaut à la somme de ses variables de gain.

Ces variables sont reliées par des arcs, formant un *graphe orienté acyclique*.

- Les parents d'une variable de décision permettent de définir ce que connaît l'agent au moment où il prend sa décision.
- Les parents d'une variable de chance décrivent une distribution probabiliste (la probabilité avec laquelle la variable de chance se produit dépend de ses parents).
- Les variables de gain ne peuvent être parents d'une autre variable.

À chaque variable de décision d'un joueur est associée une *règle de décision*. Cette règle donne une distribution de probabilités sur les actions associées à la variable de décision. La distribution dépend des parents de la variable et indique les probabilités que l'agent choisisse les différentes actions. Une *stratégie*, pour un agent donné, revient à attribuer une règle de décision à chacune des variables de décision de l'agent.



En noir les variables associées à Alice, en gris celles de Bob. En pointillés les arcs d'observation.

FIG. 2.2 – MAID correspondant au jeu « Alice, son patio et l'arbre de Bob » (exemple 2.4)

Pour un jeu donné, sa représentation sous forme de MAID n'est pas plus importante que sous forme extensive. Elle est même possiblement exponentiellement plus compacte.

**Exemple.** L'exemple 2.4 est un énoncé proposé par Koller et Milch afin d'illustrer ces notions. Il met en jeu deux agents (Alice et Bob) ayant à prendre respectivement deux décisions, et une seule décision. La représentation sous forme de MAID est proposée figure 2.2.

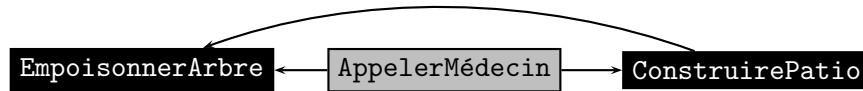
#### EXEMPLE 2.4 (ALICE, SON PATIO ET L'ARBRE DE BOB)

Alice désire construire un patio derrière sa maison. Le patio a d'autant plus de valeur qu'Alice a une vue dégagée sur l'océan. Malheureusement un arbre dans le jardin de son voisin Bob bloque la vue. Alice envisage d'empoisonner l'arbre, ce qui lui demande un effort, mais peut rendre l'arbre malade. Bob ne peut pas dire si Alice a empoisonné l'arbre, mais il peut voir si l'arbre est malade. Il a la possibilité d'appeler un médecin (à un certain coût). La venue d'un médecin réduit les chances que l'arbre meurt pendant l'hiver. Alice doit prendre une décision pour la construction de son patio avant que l'hiver n'arrive. Quand elle prend sa décision, elle sait si un médecin est venu, mais ne peut pas voir dans quel état est l'arbre.

**Localité et dépendance.** Pour profiter de la localité apportée par la description sous forme de MAID, Koller et Milch proposent la notion de *pertinence stratégique* entre les variables de décision. Ainsi, dans l'exemple 2.4, pour qu'Alice décide d'empoisonner ou non l'arbre de Bob, elle doit comparer ses gains espérés dans les deux situations. Cependant, le gain espéré dans le cas où Alice empoisonne l'arbre dépend de la probabilité que l'arbre meurt, sachant qu'il a été empoisonné. Et cette probabilité dépend elle-même de la probabilité que Bob appelle un docteur s'il observe que l'arbre est malade. Donc, Alice doit connaître la règle de décision de la variable `AppelerMédecin` pour décider de sa meilleure action à jouer au moment de la variable `EmpoisonnerArbre`. Dans cette situation, on dit que `AppelerMédecin` est pertinent par rapport à `EmpoisonnerArbre`, autrement dit que la variable (l'action) `EmpoisonnerArbre` dépend stratégiquement de la variable (l'action) `AppelerMédecin`.

Koller et Milch proposent alors un critère graphique — la *s-atteignabilité* — ne dépendant que de la structure du MAID et permettant de calculer le graphe de pertinence (*i.e.* de dépendance)





En noir les variables associées à Alice, en gris celle de Bob.

FIG. 2.3 – Graphe de pertinence du jeu entre Alice, son patio et l’arbre de Bob (exemple 2.4)

(voir figure 2.3 pour le graphe de dépendance de l’exemple 2.4).

**Équilibres.** Koller et Milch utilisent le graphe de pertinence pour présenter un algorithme « diviser pour régner » et calculer les équilibres de Nash. Dans le cas des MAIDs, trouver un équilibre de Nash revient à optimiser chacune des variables de décision, c’est-à-dire trouver pour chacune des variables de décision la meilleure action à jouer.

Dans le cas où le graphe de pertinence est acyclique, un ordre topologique peut être calculé, ce qui permet d’exhiber les variables de décision indépendantes, qui peuvent donc être optimisées. On s’intéresse alors aux variables qui ne dépendent que de celles que l’on vient d’optimiser. Par récursivité, on peut ainsi traiter l’ensemble des variables, et calculer les équilibres de Nash.

Dans le cas où le graphe de dépendance est cyclique, Koller et Milch s’intéressent aux composantes fortement connexes du graphe de dépendance, et appliquent un algorithme similaire au précédent.

## 2.2.2 Dépendance d’actions par gains

Les modèles présentés ici, les « *Game Networks* » de La Mura et les « *Action Graph Game* » de Bhat et Leyton-Brown, s’intéressent à la définition d’une dépendance d’actions calculée à partir des gains.

### « *Game Networks* » (La Mura)

**Contexte.** Dans [LM00], Pierfrancesco La Mura s’intéresse à représenter de manière modulaire des jeux. Il propose une nouvelle classe de représentation graphique, les « *Game Networks* », ou GNets, qui se veut plus structurée et plus compacte que les représentations classiques (*i.e.* la forme stratégique et la forme extensive).

Les GNets sont inspirés d’une représentation pour les problèmes de décision mono-agent, les « *Expected Utility Networks* » (EU Nets), qui généralise les réseaux markoviens.

- Les *réseaux markoviens* définissent un processus stochastique, c’est-à-dire un processus où la prédiction du futur à partir du présent ne nécessite pas la connaissance du passé. Autrement dit, en notant  $X_t$  la valeur d’une variable à un instant  $t$ , les réseaux markoviens possèdent la propriété que  $P(X_{n+1} = x | X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = x | X_n)$ , *i.e.* la probabilité que la variable  $X$  ait la valeur  $x$  à l’instant  $n + 1$  ne dépend que de la valeur de la variable  $X$  à l’instant  $n$ , et non de sa valeur aux instants précédents.
- les *EU Nets* étendent les réseaux markoviens et exploitent une notion d’indépendance stratégique entre décisions afin de les décentraliser : un agent compliqué peut être remplacé par un ensemble d’agents plus simples, indépendants.

Les GNets étendent les EU Nets en permettant de capturer les relations causales entre les événements. Autrement dit, les GNets généralisent les réseaux bayésiens (qui ont une approche

probabiliste de la causalité), de la même manière que les EU Nets généralisent les réseaux markoviens. La Mura s'intéresse alors à la notion d'équilibre dans les GNets, et présente des méthodes de convergence pour le calcul des équilibres de Nash.

**Modèle.** Les GNets se définissent par la donnée d'un graphe dont les sommets sont appelés par La Mura *variables de décision*. Ces variables correspondent aux actions accessibles à un ensemble d'agents. Au graphe est associé un *partitionnement des sommets*, qui indique quel agent décide à chaque variable de décision. Deux types d'arcs existent dans le graphe :

- les *arcs causals*, orientés, capturent les relations de causalité entre les variables de décision ;
- les *arcs de préférence*, non orientés, indiquent les dépendances de gains entre les variables de décision.

Enfin, à chaque sommet sont associées deux valeurs :

- $p$  identifie un système de *probabilité conditionnelle* qui dépend des parents de la variable de décision dans le graphe de causalité ;
- $w$  représente le *potentiel de gain* de la variable de décision et dépend de ses voisins dans le graphe de préférence. Le potentiel de gain est un coefficient multiplicateur par rapport à un point référence du jeu. Pour déterminer le coefficient global d'un joueur, on multiplie les potentiels de gains associés à ses différentes actions. Le gain final est obtenu en multipliant le potentiel de gain global par le gain du point de référence.

**Exemple.** L'exemple 2.5 est proposé par La Mura pour présenter les GNets. Dans cet exemple, le joueur 2 observe le joueur 1 et décide ensuite de son action. La figure 2.4 explicite les représentations sous forme extensive et sous forme GNet de ce jeu.

EXEMPLE 2.5 (BAGARRE AU BAR (« THE BEER/QUICHE GAME »))

Dans ce jeu, la Nature décide du type du joueur 1 qui peut être fort ( $F$ ) ou faible ( $-F$ ). Le joueur 1, qui connaît son type, va dans un bar et commande soit une bière ( $B$ ) soit une quiche ( $-B$ ). Dans le bar se trouve le joueur 2, qui est une brute et donc aime bien se battre avec les personnes faibles. Après avoir observé la commande du joueur 1, le joueur 2 décide de déclencher un combat ( $C$ ) ou non ( $-C$ ). Si le joueur 1 est fort, il ripostera, et le joueur 2 préfère ne pas se battre. Le joueur 1 préfère toujours éviter le combat, mais d'autant plus qu'il est faible. Enfin, les joueurs forts préfèrent la bière, et les joueurs faibles la quiche.

Dans cet exemple, pour la représentation GNet, le point de référence est  $-F, -B, -C$  qui assure un gain de  $(12, 2)$ , *i.e.* le joueur 1 gagne 12 et le joueur 2 gagne 2, comme indiqué sur la forme extensive. Plaçons-nous dans la situation  $F, -B, C$ , et cherchons à calculer le gain des deux joueurs :

$$u(F, -B, C) = (u_1(F, -B, C), u_2(F, -B, C))$$

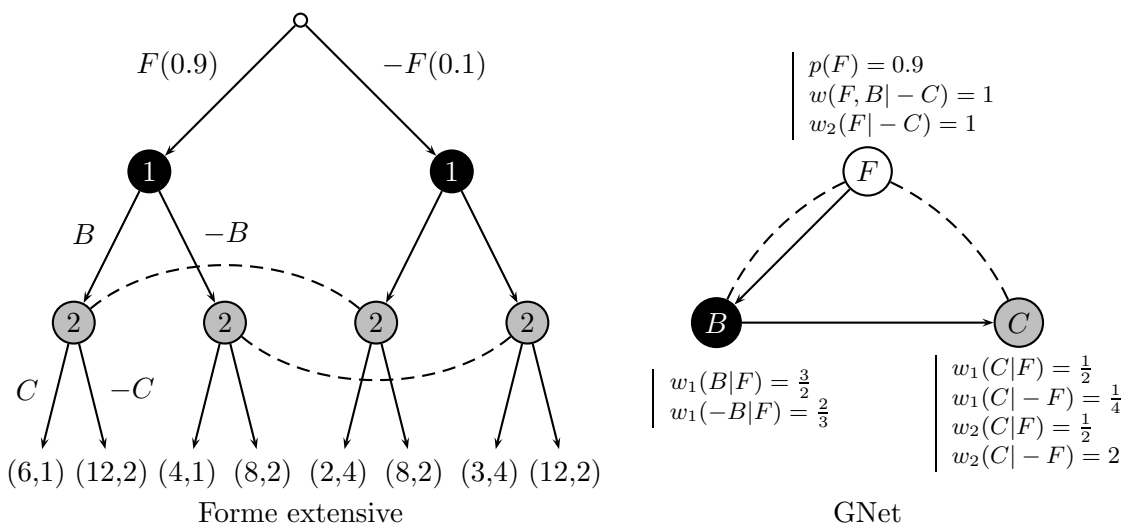
Pour le joueur 1 :

$$u_1(F, -B, C) = w_1(-B|F) \times w_1(C|F) \times u_1(-F, -B, -C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 = 4$$

Pour le joueur 2 :

$$u_2(F, -B, C) = w_2(C|F) \times u_2(-F, -B, -C) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

D'où  $u(F, -B, C) = (4, 1)$  qui correspond bien au gain indiqué par la forme extensive.



Les sommets noirs correspondent aux actions du joueur 1, les sommets gris à celles du joueur 2. Dans la forme extensive, les sommets reliés par des pointillés sont équivalents pour le joueur 2 qui ne connaît pas le type du joueur 1. Dans le GNet, le point de référence est  $-F, -B, -C$ , les potentiels de gains sont donnés par rapport à ce point de référence.

FIG. 2.4 – Forme extensive et GNet du jeu « Bagarre au bar » (exemple 2.5)

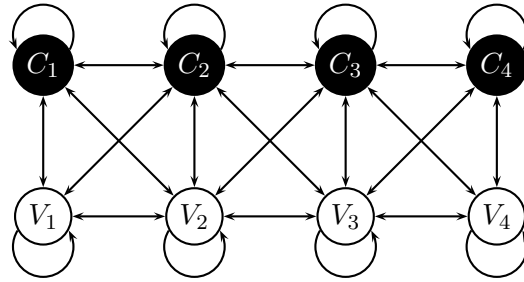
**Localité et dépendance.** La Mura utilise une notion de dépendance d’actions (ou ici de variables de décision) calculée à partir des gains. Les deux types d’arcs composant un GNet permettent de capturer à la fois une *indépendance probabiliste* — au travers des arcs causaux, un agent prend une décision en ne connaissant que les décisions prises par ses parents dans le graphe de causalité — et une *indépendance de gains* — au travers des arcs de préférence, le gain d’un agent ne dépend que des décisions prises par ses voisins dans le graphe de préférence.

Deux variables de décision qui vérifient à la fois la dépendance causale et la dépendance de gains sont dites « *strategically independant* », et peuvent effectivement être décentralisées, c’est-à-dire remplacées par un ensemble d’agents, plus simples.

**Équilibres.** La Mura utilise les GNets pour accélérer le calcul des équilibres de Nash. Il détaille en particulier un algorithme pour identifier un équilibre unique en tant que fonction des gains. Pour cela, il étudie la convergence vers 0 d’un vecteur d’actions, en supposant que la probabilité d’une action augmente ou diminue proportionnellement à son gain, tout en respectant les autres actions possibles. La Mura présente également une méthode dérivée de la précédente pour identifier tous les équilibres de Nash.

« **Action Graph Games** » (Bhat et Leyton-Brown)

**Contexte.** Dans [BLB04], Navin Bhat et Kevin Leyton-Brown posent spécifiquement le problème de la réduction de la complexité du calcul des équilibres de Nash. Plus précisément, ils proposent un modèle compact de représentation des jeux stratégiques, les « *Action-Graph Games* » (AGG), où une relation de voisinage est définie entre les actions des joueurs. Ce voisinage est utilisé pour définir une indépendance d’actions par gains et un algorithme de



En noir les actions d'un vendeur de chocolat, en blanc celles d'un vendeur de vanille.

FIG. 2.5 – AGG correspondant au jeu entre les vendeurs de glace (exemple 2.6)

calcul des équilibres de Nash.

**Modèle.** Les AGGs proposés par Bhat et Leyton-Brown se rapprochent de la définition des jeux stratégiques vue dans le chapitre 1. Un AGG se définit par la donnée d'un quadruplet  $\langle N, C, v, u \rangle$  :

- $N$  est un ensemble d'agents.
- $C = \prod_{i \in N} C_i$ . Chaque agent  $i$  a accès à un ensemble de stratégies  $C_i$ , mais on s'intéresse plutôt à l'ensemble des actions distinctes possibles du jeu :  $S = \bigcup_{i \in N} C_i$ .
- $v \subseteq S \times S$  définit une relation de voisinage, orientée, entre les actions éléments de  $S$ .
- $u : S \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de gains.  $\Delta$  est l'ensemble de toutes les distributions possibles, où une distribution indique combien d'agents choisissent chaque action.

Le problème indexé par Bhat et Leyton-Brown se différencie donc des jeux stratégiques classiques. D'une part, les joueurs ont tendance à avoir des actions communes, d'où l'utilisation de l'ensemble  $S$  plutôt que  $C$ . D'autre part, la fonction de gains dépend du nombre d'agents réalisant une certaine action et non pas de quels agents réalisent cette action.

**Exemple.** L'exemple 2.6 proposé par Bhat et Leyton-Brown illustre la définition des AGGs. Il met en jeu un grand nombre d'agents ( $n$ ), pour autant, l'AGG associé (figure 2.5) est de taille réduite.

EXEMPLE 2.6 (LES VENDEURS DE GLACE : VANILLE OU CHOCOLAT ?)

$n$  vendeurs de glace veulent s'installer sur une plage. Ils ont accès à quatre emplacements disponibles. Chaque vendeur vend soit des glaces à la vanille, soit des glaces au chocolat. Les vendeurs de chocolat (respectivement vanille) réagissent négativement à la présence d'un autre vendeur de chocolat (respectivement vanille) au même emplacement ou sur un emplacement voisin. Ils réagissent au contraire positivement à la présence d'un vendeur de vanille (respectivement chocolat).

Les AGGs modélisent ce problème par la définition de deux types d'agents (vanille ou chocolat). Chaque agent a accès à quatre stratégies (actions) puisque quatre emplacements sont disponibles. La figure 2.5 décrit le graphe de voisinage associé.

Dans le cadre d'un jeu stratégique, la modélisation aurait défini  $n$  agents correspondant aux  $n$  vendeurs de glace. Chaque agent aurait accès à huit stratégies, correspondant à la vente de glace à la vanille ou au chocolat sur l'un des quatre emplacement disponible.

On peut remarquer, dans le cadre de la représentation du AGG, que celle-ci est indépendante du nombre de joueurs. En fait, le nombre de joueurs intervient, mais uniquement dans la définition de la fonction de gains  $u$ . En effet,  $u : S \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\Delta$  l'ensemble de toutes les distributions possibles. Une distribution indique combien d'agents choisissent une action. Donc, plus le nombre de joueurs est grand, plus le nombre de distributions est important et plus l'ensemble de départ de la fonction de gains est large.

**Localité et dépendance.** Dans les AGGs, la localité et la dépendance sont capturées par le graphe de voisinage. Ce graphe met en relation les actions qu'un agent peut effectuer, et sert à déterminer l'influence d'une action sur le gain des joueurs. Le graphe de voisinage définit donc une relation de dépendance d'actions par gains. La fonction de gains et la relation de voisinage sont liées par le fait que quels que soient les agents  $i$  et  $j$ , le gain de  $i$  est indépendant de l'action de l'agent  $j$ , si l'agent  $j$  choisit une action non voisine de l'action de l'agent  $i$ . En particulier dans le jeu des vendeurs de glace, si un agent s'installe à l'emplacement le plus à gauche, il ne sera pas affecté par ce que pourrait vendre le vendeur installé sur l'emplacement le plus à droite.

**Équilibres.** Utilisant en particulier le graphe de dépendance, Bhat et Leyton-Brown proposent de nouveaux algorithmes pour calculer les équilibres de Nash par des méthodes itératives (« *continuation methods* »). Ces méthodes sont très utilisées lorsque la solution à un système perturbé d'équations est connu, et que l'on recherche la solution du système non perturbé. Dans le cas des jeux, on construit une suite de jeux dont la fonction de gain dépend d'un paramètre unique  $\lambda$ , et telle que  $\lambda = 0$  correspond au jeu qui nous intéresse, et  $\lambda = 1$  correspond à un jeu dont on connaît la solution. Les « *continuation methods* » partent de la solution connue, et font décroître le paramètre  $\lambda$  jusqu'à arriver au jeu qui nous intéresse.

Ces méthodes itératives nécessitent le calcul d'une matrice Jacobienne de la fonction de gain, qui dépend du degré entrant le plus élevé dans le graphe de voisinage (et non pas du nombre total de sommets). Le temps de calcul peut être optimisé à l'aide du graphe de voisinage, et par le fait que la fonction de gains des AGGs ne dépend que du nombre d'agents choisissant une action (et non pas de l'identité de ces agents).

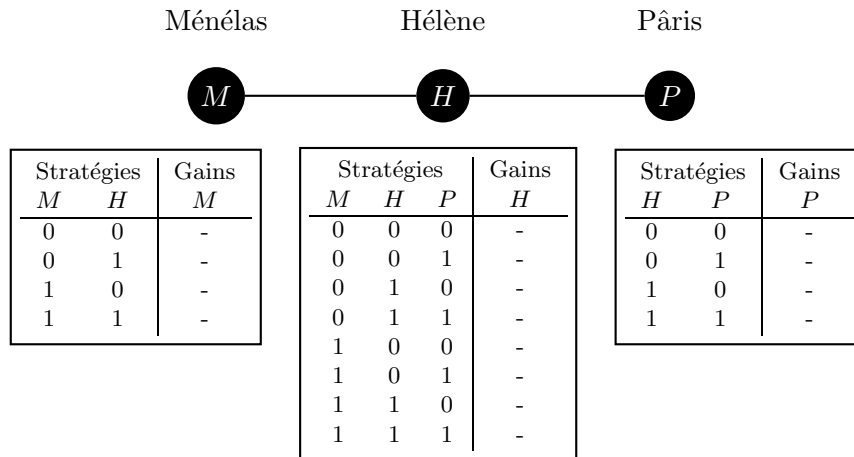
Ces méthodes se trouvent particulièrement efficaces dans le cas des jeux fortement symétriques (où tous les agents ont accès aux mêmes stratégies), le calcul de la matrice Jacobienne devenant alors efficace, *i.e.* pouvant s'effectuer en temps polynomial.

## 2.3 Dépendance d'agents

Dans cette section nous nous intéressons aux modèles utilisant une notion de dépendance d'agents. Le seul modèle rentrant dans cette catégorie est le modèle de Kearns, Littman et Singh, les « *Graphical Games* », où la dépendance est calculée à partir des gains.

### « *Graphical Games* » (Kearns, Littman et Singh)

**Contexte.** Dans [KLS01], Michael Kearns, Michael Littman et Satinder Singh s'intéressent à la modélisation de problèmes de théorie des jeux mettant en interactions un grand nombre d'agents. Pour ce faire, ils développent les « *Graphical Games* » ou GGs, qui sont une représentation plus compacte, mais tout aussi générale, que les représentations classiques. Ils présentent également des algorithmes pour manipuler les GGs, et calculer des équilibres de Nash.



Les matrices de gains sont vides, mais permettent d'apprécier la compacité de la représentation.

FIG. 2.6 – GG de la guerre de Troie (exemple 2.7)

**Modèle.** Les GGs se fondent sur les jeux stratégiques, auxquels ils sont totalement équivalents. Kearns, Littman et Singh présentent les GGs en stratégie 0/1 (où chaque joueur n'a que deux stratégies), mais indiquent que la représentation peut s'étendre à plus de stratégies.

Les GGs s'appuient sur un *graphe non orienté* où chaque sommet représente un joueur. À chacun des sommets est associée une matrice représentant la *table de gains* de ce joueur/sommet. À la différence des jeux stratégiques, la table de gains d'un joueur dans les GGs n'est indexée que par les voisins de ce joueur dans le graphe. Les gains d'un joueur sont ainsi entièrement déterminés par sa stratégie et les stratégies de ses voisins

Un GG pour un jeu à  $n$  joueurs est donc défini par la donnée d'un graphe de voisinage à  $n$  sommets, et  $n$  matrice de gains de taille réduite.

**Exemple.** L'exemple 2.7 et la figure 2.6 illustrent la définition des GGs. Il met en jeu trois joueurs, mais seul un d'entre eux est influencé par les deux autres.

#### EXEMPLE 2.7 (LA GUERRE DE TROIE)

*Hélène, l'épouse du roi Ménélas, a été enlevée par Pâris, le Troyen. Ménélas recherche sa femme. Pâris veut la garder captive.*

Sans entrer dans le détail des gains associés à ces situations, la figure 2.6 présente le graphe de voisinage, et la forme des matrices de gains associées aux agents/sommets. On peut noter que, dans le cas d'une représentation sous forme normale, chacune des matrices de gains seraient indexées par les trois joueurs.

**Localité et dépendance.** La localité des GGs est intégrée directement dans la structure du graphe de voisinage. Étant donné un joueur, tous les agents susceptibles de l'influencer, quant à ces gains, sont ses voisins dans le graphe. La relation de voisinage est donc bien ici une notion de dépendance d'agents par gains.

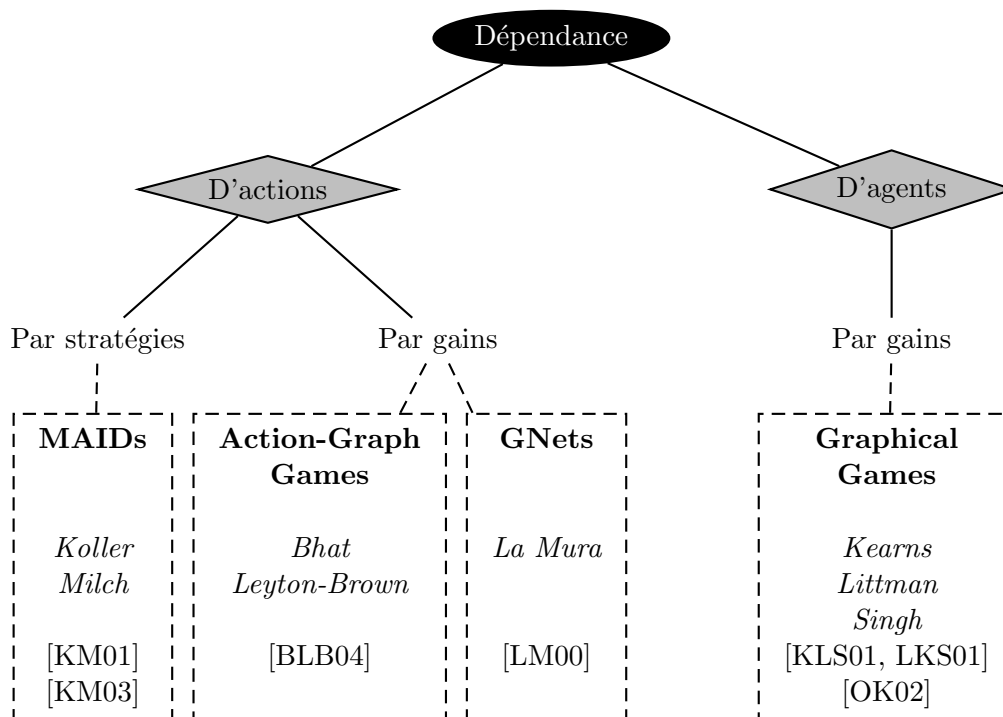


FIG. 2.7 – Vue d'ensemble des interactions locales en théorie des jeux stratégiques

**Équilibres.** Les GGs sont totalement équivalents aux jeux stratégiques. De fait, le théorème de Nash (théorème 1.1) vu dans le chapitre 1 peut s'appliquer : il est certain qu'un équilibre existe dans un GG.

Kearns, Littman et Singh s'attachent alors à identifier des structures du graphe de voisinage pour lesquelles il existe des algorithmes permettant un gain calculatoire significatif lors de la recherche des équilibres de Nash.

En particulier, dans le cas où le graphe de voisinage est un arbre, Kearns, Littman et Singh proposent un algorithme exponentiel pour calculer *tous* les équilibres de Nash. Dans [LKS01], ils présentent un algorithme efficace (polynomial en nombre d'agents) permettant de calculer *un* équilibre. Dans le cas où le graphe de voisinage admettrait des cycles, Luis Ortiz et Kearns proposent dans [OK02] des algorithmes itératifs de calcul d'équilibres de Nash approchés.

## 2.4 Bilan

Les modèles que nous avons présentés ont pour point commun la définition d'une notion de dépendance pour capturer la localité d'interaction dans les jeux stratégiques. Néanmoins, ils diffèrent sur de nombreux points tels que les domaines d'inspiration ou d'application, les méthodes de séparation des gains, ou encore les raisons du développement du modèle. Le tableau 2.1 synthétise ces différentes informations. La figure 2.7 propose une vue d'ensemble des modèles intégrant la localité d'interactions en théorie des jeux stratégiques.

	MAIDs <i>Koller, Milch</i> [KM01, KM03]	GNets <i>La Mura</i> [LM00]	Action-Graph Games <i>Bhat, Leyton-Brown</i> [BLB04]	Graphical Games <i>Kearns, Littman, Singh</i> [KLS01, LKS01, OK02]
But	Analyse Compacité Équilibres	Compacité Équilibres	Compacité Équilibres	Compacité Équilibres
Modèle	Variables de chance, de décisions et de gains + graphe de variables	Graphe de variables Arcs causals / de préférence Potentiel de gains	Jeu stratégique + Graphe de voisinage	Graphe de voisinage + Table de gains indexée par les voisins
Localité	Critère graphique pour calculer la pertinence stratégique	Indépendance de gains + Indépendance probabiliste = Indépendance stratégique	Graphe de voisinage d'actions	Graphe de voisinage d'agents
Séparation des gains	Additive	Multiplicative	Fonction de gains	Pas de séparation
Inspiration Applications	Problèmes de décision Diagramme d'influence Modèles probabilistes	Problèmes de décision EU Nets	Jeux stratégiques	Jeux stratégiques sous forme normale

TAB. 2.1 – Synthèse des différents modèles de théorie des jeux stratégiques intégrant la localité d'interaction







DEUXIÈME PARTIE

---

---

RÉSEAUX DE JEUX



## Chapitre 3

---

---

# PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES RÉSEAUX DE JEUX

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle</b>	<b>54</b>
3.1.1	Définition formelle	54
3.1.2	Représentation graphique	55
3.1.3	Un exemple de réseau de jeux à trois joueurs et deux jeux	56
<b>3.2</b>	<b>Réseaux de jeux, théorie des jeux et localité</b>	<b>57</b>
3.2.1	Localité dans les réseaux de jeux	57
3.2.2	Réseaux de jeux et théorie des jeux	57
<b>3.3</b>	<b>Équilibres</b>	<b>58</b>
3.3.1	Équilibre local	59
3.3.2	Équilibre global	60
<b>3.4</b>	<b>Dépendance</b>	<b>64</b>
3.4.1	Localité et dépendance	64
3.4.2	Dépendance dans un jeu	64
3.4.3	Dépendance dans un réseau de jeux	65
3.4.4	Utilisation	66
<b>3.5</b>	<b>Conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global</b>	<b>67</b>
3.5.1	Agents auto-indépendants	67
3.5.2	Graphe de dépendances simple	68
3.5.3	Agents auto-indépendants à jeux multiples	68
<b>3.6</b>	<b>Comparaison aux modèles de l'état de l'art</b>	<b>69</b>

---

*Dans ce chapitre nous nous intéressons aux définitions et principaux outils utilisés dans les réseaux de jeux.*

Les réseaux de jeux s'appuient sur les jeux stratégiques avec la particularité que *les joueurs peuvent participer à plusieurs jeux simultanément*. Chaque jeu du réseau permet de décrire

les interactions locales qui interviennent entre les agents de ce jeu. Il devient alors possible de définir des *groupes d'interactions*, un joueur peut ainsi interagir localement avec différents groupes d'agents — le joueur participe à plusieurs jeux avec les différents agents — sans que ces agents n'interagissent entre eux — il n'existe pas de jeux entre les agents.

Après avoir présenté les spécificités des réseaux de jeux en ce qui concerne les gains et les stratégies, la section 3.1 en donne la définition formelle. Elle détaille également la représentation graphique que nous avons définie afin de fournir un support visuel à la description d'un réseau de jeux et se termine sur un exemple de réseau à trois joueurs et deux jeux.

La section 3.2 s'attarde sur la notion de localité dans les réseaux de jeux, et compare, sur un exemple, la modélisation par un réseau de jeux et par un jeu stratégique.

La section 3.3 discute des équilibres dans les réseaux de jeux. Ces équilibres se définissent à deux niveaux : les équilibres locaux sont les équilibres de Nash de chacun des jeux du réseau, alors que les équilibres globaux définissent une situation d'équilibre pour tous les joueurs et tous les jeux du réseau. Cette section présente également la méthode de calcul des équilibres globaux à partir des équilibres locaux.

Dans la section 3.4 nous discutons de la notion de dépendance dans les réseaux de jeux. Alors que la localité est directement capturée par la structure du réseau de jeux, la dépendance nous permet d'étudier l'influence des agents les uns envers les autres.

Au contraire de la théorie des jeux où il existe toujours un équilibre de Nash, il est possible de construire des réseaux de jeux n'admettant pas d'équilibre global. La section 3.5 utilise la notion de dépendance pour présenter des conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global. Elle s'intéresse particulièrement aux agents auto-indépendants, *i.e.* aux agents qui ne dépendent pas d'eux-mêmes.

Enfin, la section 3.6 situe les réseaux de jeux dans le paysage des modèles de l'état de l'art, notamment par rapport aux « Graphical Games » de Kearns, Littman et Singh, et aux « Multi-Agent Influence Diagrams » de Koller et Milch. Nous redonnons également la figure et le tableau résumé du chapitre état de l'art (chapitre 2) en y intégrant les réseaux de jeux.

## 3.1 Modèle

### 3.1.1 Définition formelle

Les réseaux de jeux se fondent sur les jeux stratégiques du chapitre 1 avec la particularité qu'un agent peut participer à plusieurs jeux simultanément.

**Gains.** À chacun des jeux d'un réseau de jeux est associée une fonction de gains dont les paramètres correspondent aux stratégies des joueurs qui participent au jeu, et non à celles de tous les joueurs du réseau. Les agents voient ainsi leurs gains partagés entre les différents jeux auxquels ils participent, sans pour autant que ces gains soient nécessairement comparables.

**Stratégies** Un agent n'a accès qu'à un seul ensemble de stratégies pour tous les jeux auxquels il participe. Nous imposons de plus la *règle de la stratégie unique* : un agent doit jouer la même stratégie pour tous les jeux auxquels il participe. Cette règle se justifie car si on la relâche, les groupes d'interactions, *i.e.* les jeux du réseau, deviennent indépendant les uns des autres, et le réseau n'a plus lieu d'être puisque les choix faits par un joueur dans un jeu n'influencent pas les choix qu'il peut faire dans les autres jeux auxquels il participe.

De manière formelle, définir un réseau de jeux consiste principalement à définir un ensemble d'agents participant à un ensemble de jeux stratégiques.

DÉFINITION 3.1 (RÉSEAU DE JEUX)

Un réseau de jeux est un triplet  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  où :

- $\mathcal{A}$  est un ensemble de joueurs (ou agents).  
On assimile habituellement  $\mathcal{A}$  à l'ensemble  $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ , où chaque entier correspond à un joueur.
- $C = \{C_i\}_{i \in \mathcal{A}}$  est un ensemble d'ensembles de stratégies.  
 $C_i = \{c_i^1, \dots, c_i^{m_i}\}$  correspond à l'ensemble des  $m_i$  stratégies accessibles au joueur  $i$ .  
Un élément  $c \in \prod_{i \in \mathcal{A}} C_i$  est appelé configuration (pure) du réseau de jeux ou configuration (pure) globale.
- $\mathcal{U} = \{\dots, \langle A^j, u^j \rangle, \dots\}$  est un ensemble décrivant les jeux du réseau :

$$\forall j \quad \left\{ \begin{array}{l} A^j \subseteq \mathcal{A} \text{ les joueurs du jeu } j \\ u^j : \prod_{i \in A^j} C_i \rightarrow \mathbb{R}^{|A^j|} \text{ la fonction de gains du jeu } j \end{array} \right.$$

Remarques.

1.  $\mathcal{U}$  permet de décrire parfaitement les différents jeux du réseau. En effet, quelque soit le jeu auquel il participe, un agent a accès au même ensemble de stratégies, qui est décrit dans  $C$ . À chaque élément  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  correspond donc le jeu stratégique  $\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle$
2. Comme dans le cadre de la théorie de jeux, nous essaierons d'utiliser des notations aussi explicites que possibles. Ainsi, dans l'exemple du réseau de jeux présenté section 3.1.3, référence est faite aux joueurs par leurs initiales plutôt que par des indices arbitraires. De même, les jeux sont indexés par les initiales des joueurs.
3. Il est possible de voir un jeu stratégique comme un réseau de jeux réduit à un seul jeu : au jeu stratégique  $\langle A, C, u \rangle$  correspond le réseau de jeux  $\langle \mathcal{A} = A, C, \mathcal{U} = \{\langle A, u \rangle\} \rangle$ .
4. Une configuration d'un des jeux du réseau sera appelée *configuration locale*. Une configuration pour l'ensemble des joueurs et des jeux sera appelée *configuration globale*.

### 3.1.2 Représentation graphique

Afin d'offrir un support visuel à la description d'un réseau de jeux, nous proposons de représenter celui-ci par un graphe biparti. De manière formelle, le graphe associé à un réseau de jeux se définit de la manière suivante :

DÉFINITION 3.2 (GRAPHE ASSOCIÉ À UN RÉSEAU DE JEUX)

Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Le graphe biparti associé est  $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, E)$  avec  $\mathcal{A}$  les sommets-joueurs,  $\mathcal{U}$  les sommets-jeux, et  $E \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{U}$  les arcs définis par :

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \left( (i, \langle A^j, u^j \rangle) \in E \Leftrightarrow i \in A^j \right)$$

Dans ce graphe, les agents sont représentés par des cercles qui contiennent leurs noms, les jeux sont représentés dans des rectangles, sous forme de tables de gains et enfin les joueurs sont reliés aux jeux auxquels ils participent. La section 3.1.3 présente un réseau de jeux à trois joueurs et deux jeux. Sa représentation graphique est donnée figure 3.1. La figure 3.4 (page 66) illustre la représentation graphique d'un jeu stratégique vu comme un réseau de jeux.

### 3.1.3 Un exemple de réseau de jeux à trois joueurs et deux jeux

#### Énoncé de l'exemple

Considérons le texte de l'exemple suivant, inspiré du jeu entre Roméo et Juliette du chapitre 1 (exemple 1.1).

EXEMPLE 3.1 (ROMÉO, JULIETTE... ET PÂRIS)

*Roméo et Juliette décident de faire une sortie. Roméo préfère aller au théâtre et Juliette à l'opéra, mais tous les deux préfèrent encore plus être ensemble. Le Comte Pâris — le fiancé de Juliette — est également en ville. N'appréciant pas du tout Roméo, il cherche à l'éviter, ce qui est réciproque. Pâris n'a pas de préférence particulière entre théâtre et opéra.*

Les éléments constitutifs du réseau de jeux associé à cet exemple sont les suivants :

- Les *joueurs* sont Roméo (joueur 1, noté  $R$ ), Juliette (joueur 2, noté  $J$ ) et Pâris (joueur 3, noté  $P$ ).
- Les *stratégies* sont identiques pour les trois joueurs qui peuvent aller soit au théâtre (stratégie  $c_1^1$  notée  $T_R$  pour Roméo,  $c_2^1$  notée  $T_J$  pour Juliette et  $c_3^1$  notée  $T_P$  pour Pâris), soit à l'opéra (stratégies  $O_R$ ,  $O_J$  et  $O_P$ ).
- Les jeux dérivent directement de la description de l'exemple. D'une part Roméo et Juliette veulent se voir, il existe donc un premier jeu stratégique entre ces deux agents (jeu 1, noté  $R/J$ ). D'autre part, Pâris et Roméo ne veulent pas se rencontrer, d'où l'existence d'un deuxième jeu entre Roméo et Pâris (jeu 2, noté  $R/P$ ).

#### Représentation formelle de l'exemple

De manière formelle, l'exemple 3.1 se décrit par un réseau de jeux  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  où :

- $\mathcal{A} = \{R, J, P\}$
- $C = \{C_R, C_J, C_P\}$  avec  $C_R = \{T_R, O_R\}$ ,  $C_J = \{T_J, O_J\}$  et  $C_P = \{T_P, O_P\}$
- $\mathcal{U} = \{\langle A^{R/J}, u^{R/J} \rangle, \langle A^{R/P}, u^{R/P} \rangle\}$  où
  - $\langle A^{R/J}, u^{R/J} \rangle$  représente le jeu entre Roméo et Juliette avec
    - $A^{R/J} = \{R, J\}$  les agents,

•  $u^{R/J}$  la fonction de gains décrite par la table suivante

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	(3, 2)	(1, 1)
$O_R$	(0, 0)	(2, 3)

- $\langle A^{R/P}, u^{R/P} \rangle$  représente le jeu entre Roméo et Pâris avec
  - $A^{R/P} = \{R, P\}$  les agents,

•  $u^{R/P}$  la fonction de gains décrite par la table suivante

$R/P$	$T_P$	$O_P$
$T_R$	(-1, -1)	(2, 0)
$O_R$	(1, 0)	(-2, -1)

#### Représentation graphique de l'exemple

La figure 3.1 présente le graphe biparti associé au réseau décrit précédemment. Il se compose de trois agents notés  $R$ ,  $J$  et  $P$  et de deux jeux notés  $R/J$  pour le jeu entre Roméo et Juliette, et  $R/P$  pour le jeu entre Roméo et Pâris.



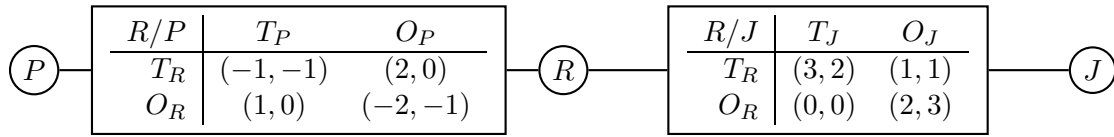


FIG. 3.1 – Graphe biparti associé au réseau de jeux de l'exemple 3.1.

## 3.2 Réseaux de jeux, théorie des jeux et localité

### 3.2.1 Localité dans les réseaux de jeux

Dans un réseau de jeux, les joueurs peuvent participer à plusieurs jeux. Chaque jeu nous permet de modéliser les interactions locales entre les joueurs participant à ce jeu. Puisqu'un joueur donné peut participer à plusieurs jeux, il est possible de définir son appartenance à plusieurs « *groupes d'interactions locales* » identifiés aux jeux du réseau.

Ainsi, dans le cas de l'exemple précédent (exemple 3.1), Roméo interagit localement d'une part avec Juliette, et d'autre part avec Pâris. Ces interactions sont modélisées par *deux jeux distincts* ayant pour joueurs d'une part Roméo et Juliette et d'autre part Roméo et Pâris. Le fait que Juliette et Pâris n'interagissent pas ensemble est alors modélisé par l'absence de jeu commun à ces deux agents.

Dans le cadre des réseaux de jeux, le phénomène de localité est donc *capturé directement dans la structure même du réseau*. Deux joueurs qui n'ont pas de jeu en commun ne peuvent pas interagir localement. Plus formellement, étant donné un réseau de jeux  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$ , deux joueurs  $(i_1, i_2) \in \mathcal{A}^2$  ne peuvent interagir localement que s'il existe un jeu  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  tel que  $(i_1, i_2) \in A^{j^2}$ .

### 3.2.2 Réseaux de jeux et théorie des jeux

La prise en compte des interactions locales dans les réseaux de jeux fournit plusieurs avantages par rapport à une modélisation par la théorie de jeux, en particulier en ce qui concerne l'attribution des gains et la compacité de la représentation. Nous illustrons ces deux concepts au travers de l'exemple 3.1 dont la modélisation par réseaux de jeux est donnée figure 3.1, et la modélisation par la théorie des jeux ci-après.

#### L'exemple 3.1 modélisé par la théorie des jeux

L'exemple 3.1 précédent peut être modélisé par un simple jeu stratégique. Les joueurs et les stratégies restent identiques à ceux de la modélisation par réseaux de jeux, mais la fonction de gain diffère. Ainsi, la modélisation par un jeu stratégique est de la forme  $\langle A, C, u \rangle$  où :

- $A = \{R, J, P\}$
- $C = \{C_R, C_J, C_P\}$  avec  $C_R = \{T_R, O_R\}$ ,  $C_J = \{T_J, O_J\}$  et  $C_P = \{T_P, O_P\}$
- $u : C_R \times C_J \times C_P \rightarrow \mathbb{R}^3$

#### Attribution des gains

L'énoncé définit sans ambiguïté les préférences des joueurs si l'on considère simplement Roméo et Juliette (respectivement Roméo et Pâris). Les gains traduisent ces préférences et

définissent un ordre entre les différentes configurations. Ainsi, dans le jeu entre Roméo et Juliette, puisque les deux agents préfèrent être ensemble, un gain élevé leur est attribué dans ce cas, et un gain faible sinon. Dans le jeu entre Roméo et Pâris, la situation inverse se produit, les agents auront un gain élevé s'ils sont séparés et faible sinon.

Dans le cas de la représentation par jeu stratégique, les trois joueurs participent au même jeu. Il faut alors déterminer les préférences du joueur commun aux deux jeux du réseau, Roméo, particulièrement lorsqu'il se trouve en situation de conflit dans les deux décisions qu'il doit prendre. Ainsi, si Roméo, Juliette et Pâris sont tous les trois au théâtre, le gain de Roméo est à la fois augmenté par la présence de Juliette et diminué par la présence de Pâris. D'autres situations de conflits peuvent également apparaître, par exemple si l'on considère que Roméo préfère le théâtre à l'opéra. Dans ce cas là, Roméo préfère-t-il être avec Juliette et Pâris au théâtre, ou bien avec Juliette sans Pâris mais à l'opéra ?

Dans les réseaux de jeux, de telles situations sont disjointes. Les joueurs communs à plusieurs jeux se voient attribuer autant de gains que de jeux auxquels ils participent. Ces gains ne sont pas nécessairement comparables, et donc lors de la recherche de configurations d'équilibres (voir section 3.3) les joueurs participant à plusieurs jeux essaieront de maximiser leurs gains dans chacun des jeux.

### Compacité

Dans le cadre de la modélisation par réseau de jeux, il est nécessaire de définir deux jeux à deux joueurs, et donc huit configurations différentes. À chacune de ces huit configurations est associé un couple de gains, soit seize gains.

Dans le cas du jeu stratégique, un seul jeu est défini, à trois joueurs. Nous avons donc huit configurations différentes, à chacune desquelles est associé un triplet de gains. Il faut donc définir vingt-quatre gains.

Cette augmentation du nombre de gains, et donc de la taille de la représentation, peut être expliquée par l'exemple. Ainsi dans la modélisation par un réseau de jeux, on attribue un gain à Juliette pour la situation  $(T_R, T_J)$  indépendamment de ce que peut faire Pâris. Dans la modélisation par jeu stratégique, le gain de Juliette devra être associé à la fois pour la situation  $(T_T, T_J, T_P)$  et pour la situation  $(T_R, T_J, O_P)$ . Ce phénomène se produit pour les quatre configurations du jeu  $R/J$  dans le cas de Juliette et également dans les quatre configurations du jeu  $R/P$  pour les gains de Pâris. On retrouve bien alors les huit gains supplémentaires apparus dans la modélisation par un jeu stratégique.

## 3.3 Équilibres

Dans les réseaux de jeux un agent a la possibilité de participer à plusieurs jeux simultanément. La notion d'équilibre de Nash se voit donc complexifier dans le cadre des réseaux de jeux. En effet, le réseau peut être étudié au niveau local, en considérant les jeux pris séparément, ou au niveau global, en considérant l'ensemble des jeux.

De fait, nous avons défini deux notions d'équilibres : les équilibres locaux s'intéressent aux équilibres des différents jeux qui composent le réseau alors que les équilibres globaux définissent une situation d'équilibre pour tous les jeux composant le réseau. Ces derniers peuvent être calculés à partir des équilibres locaux, pour autant certains réseaux de jeux n'admettent pas d'équilibre global.

### 3.3.1 Équilibre local

Les équilibres locaux sont définis comme étant les équilibres de Nash des jeux du réseau. Ils permettent de déterminer quelle stratégie jouerait un agent pour maximiser son gain s'il ne participait qu'au seul jeu étudié.

**DÉFINITION 3.3 (ÉQUILIBRES LOCAUX D'UN RÉSEAU DE JEUX)**

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soit  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  un des jeux du réseau, on note  $\mathcal{L}_j(\Gamma)$  l'ensemble des équilibres locaux du jeu  $j$  de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{L}_j(\Gamma) = \mathbf{Nash}(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle)$$

On note  $\mathcal{L}(\Gamma)$  l'ensemble des équilibre locaux de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Gamma) &= \left\{ \sigma^* \in \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \Delta(\{C_i\}_{i \in A^j}) \mid \exists \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \sigma^* \in \mathbf{Nash}(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle) \right\} \\ &= \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \mathbf{Nash}(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle) = \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_j(\Gamma) \end{aligned}$$

Les stratégies pures étant très souvent utilisées sans considérer l'extension mixte, nous donnons ici la définition d'un équilibre local en stratégies pures. Cette définition dérive directement de la précédente.

**DÉFINITION 3.4 (ÉQUILIBRES LOCAUX EN STRATÉGIES PURES)**

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soit  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  un des jeux du réseau, on note  $\mathcal{L}_j^p(\Gamma)$  l'ensemble des équilibres locaux en stratégies pures du jeu  $j$  de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{L}_j^p(\Gamma) = \mathbf{Nash}^p(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle)$$

On note  $\mathcal{L}^p(\Gamma)$  l'ensemble des équilibre locaux purs de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(\Gamma) &= \left\{ c^* \in \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \prod_{i \in A^j} C_i \mid \exists \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad c^* \in \mathbf{Nash}^p(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle) \right\} \\ &= \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \mathbf{Nash}^p(\langle A^j, \{C_i\}_{i \in A^j}, u^j \rangle) = \bigcup_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_j^p(\Gamma) \end{aligned}$$

**EXEMPLE 3.2 (ÉQUILIBRES LOCAUX DU RÉSEAU DE JEUX DE L'EXEMPLE 3.1)**

Considérons  $\Gamma$ , le réseau de jeux de la figure 3.1 (page 57).

- Les équilibres de Nash purs entre Roméo et Juliette sont  $\mathcal{L}_{R/J}^p = \{(T_R, T_J), (O_R, O_J)\}$ . Les équilibres de Nash purs entre Roméo et Pâris sont  $\mathcal{L}_{R/P}^p = \{(T_R, O_P), (O_R, T_P)\}$ . On trouve alors

$$\mathcal{L}^p(\Gamma) = \{(T_R, T_J), (O_R, O_J), (T_R, O_P), (O_R, T_P)\}$$

- $(\frac{3}{4}[T_R] + \frac{1}{4}[O_R], \frac{1}{4}[T_J] + \frac{3}{4}[O_J])$  est le seul équilibre de Nash mixte entre Roméo et Juliette.  $(\frac{1}{2}[T_R] + \frac{1}{2}[O_R], \frac{2}{3}[T_R] + \frac{1}{3}[O_R])$  est le seul équilibre de Nash mixte entre Roméo et Pâris. On trouve alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Gamma) &= \left\{ ([T_R], [T_J]), ([O_R], [O_J]), ([T_R], [O_P]), ([O_R], [T_P]), \right. \\ &\quad \left. (\frac{3}{4}[T_R] + \frac{1}{4}[O_R], \frac{1}{4}[T_J] + \frac{3}{4}[O_J]), (\frac{1}{2}[T_R] + \frac{1}{2}[O_R], \frac{2}{3}[T_R] + \frac{1}{3}[O_R]) \right\} \end{aligned}$$

### 3.3.2 Équilibre global

Les équilibres globaux définissent une situation d'équilibre pour tous les joueurs du réseau, dans tous les jeux auxquels ils participent. Pour les définir de manière formelle, nous introduisons la notion de projection.

#### Projection

La notion de projection permet de ne considérer une configuration du réseau qu'au travers un certain nombre d'agents nous intéressant particulièrement.

#### DÉFINITION 3.5 (PROJECTION)

Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux avec  $\mathcal{A} = [1, \dots, n]$  l'ensemble des agents et  $C = \{C_i\}_{i \in \mathcal{A}}$  l'ensemble des ensembles de stratégies des joueurs. Étant donné une configuration  $\sigma \in \Delta(C)$  et  $A \subseteq \mathcal{A}$  un ensemble d'agents, on définit  $\rho(\sigma, A)$  la projection de  $\sigma$  sur  $A$  :

$$\begin{aligned} \rho : \Delta(C) \times 2^{\mathcal{A}} &\rightarrow \bigcup_{B \subseteq \mathcal{A}} \Delta(\{C_i\}_{i \in B}) \\ (\sigma, A) &\mapsto \rho(\sigma, A) = (\sigma_i)_{i \in A} \end{aligned}$$

Une configuration peut être projetée sur n'importe quel sous-ensemble de joueurs (par exemple des joueurs ne participant pas aux mêmes jeux). En pratique, la projection sera utilisée pour considérer un des jeux du réseau. Le sous-ensemble de joueurs considéré sera donc l'ensemble des joueurs qui participent au jeu.

#### EXEMPLE 3.3 (PROJECTION)

Pour plus de lisibilité, l'exemple est donné sur des stratégies pures. Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  le réseau de jeux de l'exemple 3.1. Pour rappel, on a  $\mathcal{A} = \{R, J, P\}$ .

Considérons la configuration pure  $c = (T_R, T_J, O_P)$ . Différentes projections sont possibles :

- $\rho(c, \{R, J\}) = (T_R, T_J)$  correspond à la projection de  $c$  sur le jeu entre Roméo et Juliette.
- $\rho(c, \{R, P\}) = (T_R, O_P)$  correspond à la projection de  $c$  sur le jeu entre Roméo et Pâris.
- $\rho(c, \{J, P\}) = (T_J, O_P)$  bien que formellement définie ne sera cependant, en pratique, pas utilisée car Pâris et Juliette ne jouent pas ensemble.

#### Définition formelle des équilibres globaux

Les *équilibres globaux* correspondent à une configuration d'équilibre pour l'ensemble des joueurs et des jeux du réseau. Ils se définissent formellement de la manière suivante :

#### DÉFINITION 3.6 (ÉQUILIBRE GLOBAL)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. On note  $\mathcal{G}(\Gamma)$  l'ensemble des équilibres globaux de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \left\{ \sigma^* \in \Delta(C) \mid \forall \langle A^j, w^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \rho(\sigma^*, A^j) \in \mathcal{L}(\Gamma) \right\}$$

De même, on note  $\mathcal{G}^p(\Gamma)$  l'ensemble des équilibres globaux en stratégies pures de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{G}^p(\Gamma) = \left\{ c^* \in \prod_{i \in \mathcal{A}} C_i \mid \forall \langle A^j, w^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \rho(c^*, A^j) \in \mathcal{L}^p(\Gamma) \right\}$$

Les équilibres globaux permettent de trouver les configurations stables du réseau, si elles existent. Dans de telles configurations, chaque agent se trouve en situation de meilleure réponse dans chacun des jeux auxquels il participe.

### Calcul des équilibres globaux à partir des équilibres locaux

Les équilibres globaux peuvent se calculer en composant entre eux les équilibres locaux « compatibles » suivant la règle de la stratégie unique.

Afin de présenter le calcul des équilibres globaux à partir des équilibres locaux, nous avons besoin d'introduire différentes notions que sont l'extension, la compatibilité et la composition.

**Extension.** La notion d'extension permet de considérer une configuration d'un jeu (*i.e.* locale) comme une configuration du réseau (*i.e.* globale). Elle peut être considérée comme l'opération réciproque de la projection. À partir d'une configuration locale ne concernant qu'un sous-ensemble des joueurs du réseau, on construit une configuration globale. N'ayant pas d'information sur les stratégies des joueurs n'appartenant pas à la configuration locale, nous leur attribuons une stratégie fictive, notée  $\perp$ .

#### DÉFINITION 3.7 (EXTENSION DE CONFIGURATIONS LOCALES)

Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soient  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  un jeu du réseau et  $\sigma \in \Delta(\{C_i\}_{i \in A^j})$  une configuration locale du jeu  $j$ . On note  $\sigma \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}}$  l'extension de la configuration locale  $\sigma$  en configuration (étendue) du réseau :

$$\sigma \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} = \sigma' \text{ avec } \forall i \in \mathcal{A} \quad \sigma'_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i \in A^j \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

On note également  $\uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}}$  l'extension d'un ensemble de configurations locales  $\Sigma = \{\sigma_k\} \subseteq \Delta(\{C_i\}_{i \in A^j})$  :

$$\Sigma \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} = \{\sigma_k\} \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} = \{\sigma_k \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}}\}$$

Dans notre calcul des équilibres globaux, l'extension va permettre d'étendre les équilibres locaux en configurations globales afin de les comparer et de les composer.

#### EXEMPLE 3.4 (EXTENSION)

Considérons un des équilibres locaux du réseau  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  de la figure 3.1, par exemple  $(T_R, T_J)$ . Alors l'extension de cet équilibre en configuration du réseau est

$$(T_R, T_J) \uparrow_{\{R, J\}}^{\mathcal{A}} = (T_R, T_J, \perp)$$

De même l'extension de  $(O_R, O_P)$  est

$$(O_R, O_P) \uparrow_{\{R, P\}}^{\mathcal{A}} = (O_R, \perp, O_P)$$

Si on considère l'ensemble des équilibres locaux en stratégies pures du jeux entre Roméo et Juliette, on trouve alors :

$$\{(T_R, T_J), (O_R, O_J)\} \uparrow_{\{R, J\}}^{\mathcal{A}} = \{(T_R, T_J, \perp), (O_R, O_J, \perp)\}$$

**Compatibilité.** Deux configurations locales sont dites compatibles si tout joueur commun à ces deux configurations joue la même stratégie dans les deux configurations. Par exemple si l'on considère les équilibres locaux calculés précédemment,  $(T_R, T_J)$  et  $(T_R, O_P)$  sont compatibles, car dans les deux le joueur commun (Roméo) joue la même stratégie ( $T_R$ ). Par contre,  $(T_R, T_J)$  et  $(O_R, T_P)$  ne sont pas compatibles car dans un cas Roméo va au théâtre, et dans l'autre cas il va à l'opéra.

Formellement la compatibilité se décrit de la manière suivante :

**DÉFINITION 3.8 (CONFIGURATIONS LOCALES COMPATIBLES)**

Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soient  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$  et  $\langle A^{j'}, u^{j'} \rangle \in \mathcal{U}$  deux jeux du réseau, et  $\sigma \in \Delta(\{C_i\}_{i \in A^j})$ ,  $\sigma' \in \Delta(\{C_i\}_{i \in A^{j'}})$  deux configurations locales du réseau. Alors :

$$\sigma \text{ et } \sigma' \text{ sont compatibles} \Leftrightarrow \rho(\sigma, A^j \cap A^{j'}) = \rho(\sigma', A^j \cap A^{j'})$$

**Composition.** La composition va servir à réunir les équilibres locaux compatibles. De manière pratique, elle prend en paramètre deux configurations du réseau (globale), qui peuvent être des configurations locales étendues au réseau. Le résultat de la composition est un ensemble

- soit vide si les configurations paramètres n'étaient pas compatibles,
- soit réduit à une configuration du réseau où les différents agents jouent les stratégies qu'ils avaient dans les configurations paramètres.

La composition se définit formellement de la manière suivante :

**DÉFINITION 3.9 (COMPOSITION DE CONFIGURATIONS DU RÉSEAU)**

Soit  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. On définit  $\otimes$  l'opérateur de composition de configurations :

$$\otimes : \left( \prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\}) \right)^2 \rightarrow 2^{\prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\})}$$

$$(\sigma, \sigma') \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ ne sont pas compatibles} \\ \{\sigma''\} & \text{sinon, avec } \forall i \in \mathcal{A} \quad \sigma''_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \sigma_i = \sigma'_i \\ \sigma_i & \text{si } \sigma_i = \perp \\ \sigma'_i & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

La composition de configurations est étendue aux ensembles de configurations de manière naturelle en composant entre eux les éléments des ensembles :

$$\otimes : \left( 2^{\prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\})} \right)^2 \rightarrow 2^{\prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\})}$$

$$(\Sigma, \Sigma') \mapsto \bigcup_{\sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma'} \sigma \otimes \sigma'$$

*Remarques.*

1.  $\otimes$  appliqué sur les ensembles est associatif et commutatif.
2.  $\{\perp_{\mathcal{A}}\} = \{(\perp, \dots, \perp)\} \subset \prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\})$  est élément neutre pour  $\otimes$  appliqué sur les ensembles :

$$\forall \Sigma \subset \prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\}) \quad \Sigma \otimes \{\perp_{\mathcal{A}}\} = \{\perp_{\mathcal{A}}\} \otimes \Sigma = \Sigma$$

3.  $\emptyset$  est élément absorbant pour  $\otimes$  appliqué sur les ensembles :

$$\forall \Sigma \subset \prod_{i \in \mathcal{A}} (\Delta(C_i) \cup \{\perp\}) \quad \Sigma \otimes \emptyset = \emptyset \otimes \Sigma = \emptyset$$

L'opérateur de composition  $\otimes$  appliqué sur deux ensembles de configurations du réseaux permet de calculer toutes les combinaisons de configurations compatibles de chacun des ensembles. Dans la suite,  $\otimes$  sera appliqué sur plusieurs ensembles de configurations. On note alors :

$$\bigotimes_{i=1}^n \Sigma_i = \Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$$

EXEMPLE 3.5 (COMPOSITION DE CONFIGURATIONS DU RÉSEAU DE LA FIGURE 3.1)

Considérons  $\Sigma = \{(T_R, T_J, T_P), (T_R, \perp, T_P)\}$  et  $\Sigma' = \{(O_R, O_J, T_P), (T_R, O_J, T_P), (\perp, \perp, T_P)\}$  deux ensembles de configurations du réseau de l'exemple 3.1. Alors :

$$\begin{aligned}
\Sigma \otimes \Sigma' &= \{(T_R, T_J, T_P), (T_R, \perp, T_P)\} \otimes \{(O_R, O_J, T_P), (T_R, O_J, T_P), (\perp, \perp, T_P)\} \\
&= (T_R, T_J, T_P) \otimes (O_R, O_J, T_P) \cup (T_R, T_J, T_P) \otimes (T_R, O_J, T_P) \\
&\quad \cup (T_R, T_J, T_P) \otimes (\perp, \perp, T_P) \cup (T_R, \perp, T_P) \otimes (O_R, O_J, T_P) \\
&\quad \cup (T_R, \perp, T_P) \otimes (T_R, O_J, T_P) \cup (T_R, \perp, T_P) \otimes (\perp, \perp, T_P) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(T_R, T_J, T_P)\} \cup \emptyset \cup \{(T_R, O_J, T_P)\} \cup \{(T_R, \perp, T_P)\} \\
&= \{(T_R, T_J, T_P), (T_R, O_J, T_P), (T_R, \perp, T_P)\}
\end{aligned}$$

**Compositions des équilibres locaux compatibles.** Le calcul des équilibres globaux peut s'effectuer en combinant entre eux les équilibres locaux compatibles. Le théorème suivant utilise les opérateurs d'extension et de composition pour décrire ce calcul.

THÉORÈME 3.1 (CALCUL DES ÉQUILIBRES GLOBAUX)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Nous avons alors :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \bigotimes_{\langle A^j, w^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$$

PREUVE. La preuve de ce théorème est donnée dans l'annexe D, page 145. ■

L'exemple 3.6 suivant présente le calcul pas-à-pas des équilibres globaux de la figure 3.1.

EXEMPLE 3.6 (CALCUL PAS-À-PAS DES ÉQUILIBRES GLOBAUX DE LA FIGURE 3.1)

Soit  $\Gamma$  le réseau de jeux de la figure 3.1. On a :

- *Équilibres locaux.*
  - Pour le jeu  $R/J$  entre Roméo et Juliette :

$$\mathcal{L}_{R/J}(\Gamma) = \left\{ ([T_R], [T_J]), ([O_R], [O_J]), \left( \frac{3}{4}[T_R] + \frac{1}{4}[O_R], \frac{1}{4}[T_J] + \frac{3}{4}[O_J] \right) \right\}$$

- Pour le jeu  $R/P$  entre Roméo et Pâris :

$$\mathcal{L}_{R/P}(\Gamma) = \left\{ ([T_R], [O_P]), ([O_R], [T_P]), \left( \frac{1}{2}[T_R] + \frac{1}{2}[O_R], \frac{2}{3}[T_R] + \frac{1}{3}[O_R] \right) \right\}$$

- *Équilibres locaux étendus.*
  - Pour le jeu  $R/J$  entre Roméo et Juliette :

$$\mathcal{L}_{R/J}(\Gamma) \uparrow_{R/J}^{\mathcal{A}} = \left\{ ([T_R], [T_J], \perp), ([O_R], [O_J], \perp), \left( \frac{3}{4}[T_R] + \frac{1}{4}[O_R], \frac{1}{4}[T_J] + \frac{3}{4}[O_J], \perp \right) \right\}$$

- Pour le jeu  $R/P$  entre Roméo et Pâris :

$$\mathcal{L}_{R/J}(\Gamma) \uparrow_{R/J}^{\mathcal{A}} = \left\{ ([T_R], \perp, [O_P]), ([O_R], \perp, [T_P]), \left( \frac{1}{2}[T_R] + \frac{1}{2}[O_R], \perp, \frac{2}{3}[T_R] + \frac{1}{3}[O_R] \right) \right\}$$

- *Équilibres globaux*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Gamma) &= \mathcal{L}_{R/J}(\Gamma) \uparrow_{R/J}^{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L}_{R/J}(\Gamma) \uparrow_{R/J}^{\mathcal{A}} \\ &= \left\{ ([T_R], [T_J], [O_P]), ([O_R], [O_J], T_P) \right\} \end{aligned}$$

Autrement dit, les deux équilibres globaux entre Roméo, Juliette et Pâris correspondent à des situations où Roméo et Juliette sont ensemble à l'opéra (resp. au théâtre) alors que Pâris est au théâtre (resp. à l'opéra).

## 3.4 Dépendance

### 3.4.1 Localité et dépendance

Nous avons vu dans le chapitre présentant l'état de l'art (chapitre 2) que les auteurs s'intéressant aux interactions locales en théorie des jeux s'attachent à développer une notion que nous avons généralisée sous le terme de dépendance.

Dans les réseaux de jeux, la localité d'interactions est directement capturée par la structure même du réseau. La notion de dépendance apparaît comme précisant cette notion de localité. En effet, deux agents qui participent à un même jeu, *i.e.* qui sont en situation d'interactions locales, ne « dépendent » pas nécessairement l'un de l'autre. Considérons par exemple la table suivante qui présente un nouveau jeu entre Roméo et Juliette.

$R/J$	$T_J$	$O_J$
$T_R$	(0, 2)	(0, 1)
$O_R$	(0, 0)	(0, 3)

Bien que Roméo et Juliette participent au même jeu, quoi que fasse Juliette les gains de Roméo sont inchangés. Juliette n'a donc pas d'influence sur les stratégies de Roméo, ni sur ses gains. Au contraire, Juliette est bien influencée par les stratégies que pourraient choisir Roméo.

Ainsi, dans les réseaux de jeux, la localité peut être vue comme une notion générale : *deux joueurs sont en interactions locales s'ils participent à un même jeu*. La dépendance cherche à affiner la localité en déterminant quels sont les agents influençant un joueur donné.

Dans le cas de l'exemple 3.1, Roméo interagit localement d'une part avec Juliette, et d'autre part avec Pâris. L'analyse de la dépendance de ses jeux nous permet de déterminer si Roméo est influencé par Juliette ou Pâris (*cf.* figure 3.2). Par contre, l'absence de jeux entre Juliette et Pâris modélise le fait que ces deux joueurs n'interagissent pas l'un avec l'autre, et donc *a fortiori* ne s'influencent pas.

La dépendance que nous avons définie dans les réseaux de jeux est une dépendance entre agents calculée en étudiant les gains des joueurs. Celle-ci dérive directement de la dépendance vue dans le chapitre 2 et que nous rappelons ici (définition 3.10).

### 3.4.2 Dépendance dans un jeu

La *dépendance d'agents par gains* dans le cadre d'un jeu stratégique est calculée en étudiant les gains de chacun des agents. Informellement, un joueur  $i_2$  dépend d'un joueur  $i_1$  si  $i_2$  à besoin de connaître la stratégie jouée par  $i_1$  pour déterminer son gain. Formellement, la dépendance d'agents par gains dans un jeu stratégique se définit de la manière suivante :





FIG. 3.2 – Graphes de dépendances des jeux du réseau de jeux de la figure 3.1

**DÉFINITION 3.10 (DÉPENDANCE D'AGENT PAR GAINS)**

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Étant donné  $(i_1, i_2) \in A^2$ , deux joueurs, on note  $i_1 \delta_u i_2$  la relation de dépendance par gains de  $i_2$  envers  $i_1$  :

$$\forall (i_1, i_2) \in A^2 \quad \left( i_1 \delta_u i_2 \Leftrightarrow \exists (c_{i_1}, c'_{i_1}) \in C_{i_1}^2, \exists c_{-i_1} \in C_{-i_1} \quad u_{i_2}(c_{-i_1}, c_{i_1}) \neq u_{i_2}(c_{-i_1}, c'_{i_1}) \right)$$

La dépendance par gains nous permet donc de déterminer les agents dont le joueur doit connaître la stratégie afin de déterminer son gain. Elle fournit une vision des interactions entre les agents sans pour autant étudier précisément les gains.

**EXEMPLE 3.7 (DÉPENDANCE DANS LES JEUX COMPOSANT LE RÉSEAU DE LA FIGURE 3.1)**

Si l'on considère les jeux du réseau de jeux de la figure 3.1 les dépendances entre les agents sont les suivantes :

- Dans le jeu  $R/J$ , puisque  $u_R(T_R, T_J) \neq u_R(T_R, O_J)$  alors  $J \delta_u R$ . De même, on a  $J \delta_u J$ ,  $R \delta_u J$  et  $R \delta_u R$ .
- Dans le jeu  $R/P$ , on trouve  $P \delta_u R$ ,  $P \delta_u P$ ,  $R \delta_u P$  et  $R \delta_u R$ .

Afin d'avoir une représentation plus explicite et plus visuelle de la dépendance, nous la représentons au travers du graphe de dépendances. Dans ce graphe, les sommets sont les joueurs du réseau. Un arc orienté relie le joueur  $i_1$  au joueur  $i_2$  si, et seulement si, le joueur  $i_2$  dépend du joueur  $i_1$ .

**DÉFINITION 3.11 (GRAPHE DE DÉPENDANCES)**

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, le graphe de dépendances de  $G$  est un graphe  $\mathcal{D}_G = (A, E)$  tel que :  $E = \{(i_1, i_2) \in A^2 \mid i_1 \delta_u i_2\}$

La figure 3.2 présente le graphe de dépendances des deux jeux composant le réseau de la figure 3.1. On observe une interdépendance de décision entre les joueurs de chaque jeu.

**3.4.3 Dépendance dans un réseau de jeux**

La notion de dépendance dans les jeux stratégiques est étendue aux réseaux de jeux, en considérant que deux agents sont dépendants dans un réseau, si ce réseau contient un jeu où les agents sont dépendants. Formellement, la dépendance dans les réseaux de jeux se définit de la manière suivante :

**DÉFINITION 3.12 (DÉPENDANCE DANS LES RÉSEAUX DE JEUX)**

Soient  $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Étant donné  $(i_1, i_2) \in \mathcal{A}^2$ , deux joueurs, on note  $i_1 \delta_{\mathcal{U}} i_2$  la relation de dépendance par gains de  $i_2$  envers  $i_1$  :

$$i_1 \delta_{\mathcal{U}} i_2 \Leftrightarrow \exists \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad i_1 \delta_{u^j} i_2$$

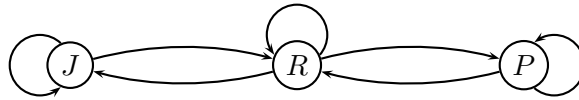


FIG. 3.3 – Graphe de dépendances du réseau de jeux de l'exemple 3.1

	Stratégies			Gains		
	$C_R$	$C_J$	$C_P$	$u_R$	$u_J$	$u_P$
$T_R$	$T_J$	$T_P$	2	2	-1	
$T_R$	$T_J$	$O_P$	5	2	0	
$T_R$	$O_J$	$T_P$	0	2	-1	
$T_R$	$O_J$	$O_P$	3	2	0	
$O_R$	$T_J$	$T_P$	0	0	0	
$O_R$	$T_J$	$O_P$	-1	0	-1	
$O_R$	$O_J$	$T_P$	2	3	0	
$O_R$	$O_J$	$O_P$	1	3	-1	

FIG. 3.4 – Réseau de jeux ayant le même graphe de dépendances que celui de l'exemple 3.1

Le graphe de dépendances d'un réseau de jeux est bien entendu défini d'une manière analogue :

DÉFINITION 3.13 (GRAPHE DE DÉPENDANCES D'UN RÉSEAU DE JEUX)

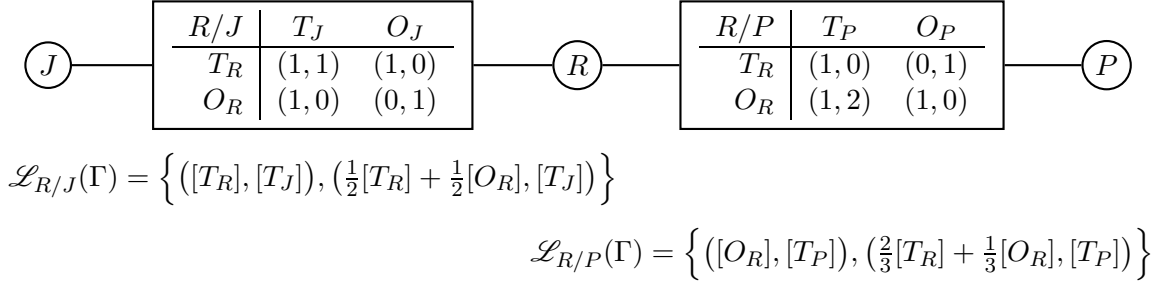
Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux, le graphe de dépendances de  $\Gamma$  est un graphe  $\mathcal{D}_\Gamma = (\mathcal{A}, E)$  tel que :  $E = \{(i_1, i_2) \in \mathcal{A}^2 \mid i_1 \delta_{\mathcal{U}} i_2\}$

La figure 3.3 présente le graphe de dépendances du réseau de jeux de la figure 3.1.

### 3.4.4 Utilisation

La dépendance détermine précisément les influences qui interviennent entre les joueurs. De plus, deux réseaux de jeux composés des mêmes agents, mais ayant des jeux différents, peuvent tout à fait avoir les mêmes dépendances. Exemple en est donné dans la figure 3.4. Celle-ci présente un réseau de jeu restreint à un seul jeu entre Roméo, Juliette et Pâris. L'analyse des dépendances permet de calculer un graphe de dépendances identique à celui de la figure 3.3 du réseau à deux jeux de l'exemple 3.1. De fait, calculer les dépendances permet de déterminer des classes de jeux, et de trouver des propriétés partagées par les réseaux d'une même classe.

Plus précisément, dans la section 3.5, nous voyons qu'au contraire des jeux stratégiques, les réseaux de jeux n'admettent pas nécessairement un équilibre. La relation de dépendance permet d'exhiber des conditions suffisantes d'existence. Le chapitre 4 s'intéresse quant à lui à l'utilisation de la dépendance pour décomposer un jeu. Informellement, il s'agit en fait de « découper » un jeu en un ensemble de jeux plus petits, c'est-à-dire contenant moins d'agents, mais ayant le même « comportement ». Les agents regroupés dans un même jeu seront les agents qui dépendent les uns des autres.

FIG. 3.5 – Réseau de jeux  $\Gamma$  sans équilibre global

### 3.5 Conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global

Le théorème de Nash (théorème 1.1 chapitre 1, [Nas51]) démontre l'existence dans tout jeu stratégique d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Au contraire des jeux stratégiques qui les composent, les réseaux de jeux n'admettent pas nécessairement un équilibre global, même en stratégies mixtes. En effet, un joueur peut se trouver en conflit quant à la stratégie à jouer pour maximiser ses gains dans les différents jeux auxquels il participe, c'est le cas dans l'exemple 3.8.

#### EXEMPLE 3.8 (RÉSEAU DE JEUX SANS ÉQUILIBRE GLOBAL)

Considérons le réseau de jeux de la figure 3.5 qui présente un jeu entre Roméo, Juliette et Pâris.

Le calcul des équilibres locaux purs nous donne  $(T_R, T_J)$  pour le jeu entre Roméo et Juliette, et  $(O_R, T_P)$  pour le jeu entre Roméo et Pâris. Il n'y a donc pas d'équilibre global pur.

Le calcul des équilibres locaux mixtes donne  $(\frac{1}{2}[T_R] + \frac{1}{2}[O_R], [T_J])$  pour le jeu entre Roméo et Juliette, et  $(\frac{2}{3}[T_R] + \frac{1}{3}[O_R], [T_P])$  pour le jeu entre Roméo et Pâris. Il n'y a donc pas d'équilibre global en stratégies mixtes.

Nous présentons ici des conditions suffisantes à l'existence d'équilibres globaux. Ces conditions se fondent sur une étude précise des interactions entre les joueurs du réseau réalisée à l'aide de la notion de dépendance qui permet de déterminer les agents influençant un joueur donné.

#### 3.5.1 Agents auto-indépendants

Dans la suite, les conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global se fondent plus particulièrement sur les agents auto-indépendants, *i.e.* les agents qui ne dépendent pas d'eux-mêmes.

#### DÉFINITION 3.14 (AGENTS AUTO-INDÉPENDANTS)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Les agents auto-indépendants de  $\Gamma$  sont les agents de l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{i \in \mathcal{A} \mid i \not\mathcal{U} i\}$$

De tels agents sont des agents qui vont (éventuellement) influencer les gains des autres joueurs, mais surtout qui ne s'influencent pas eux-mêmes. Il peut par exemple s'agir d'agent « fictifs » dont on a besoin pour la modélisation, mais qu'on ne désire pas modéliser précisément. Dans un tel cas, une solution est d'ajouter l'agent au réseau, mais en lui attribuant des gains identiques quelques soient les configurations. Pour l'agent, toutes les configuration se valent, et il ne diminue pas le nombre d'équilibres globaux.

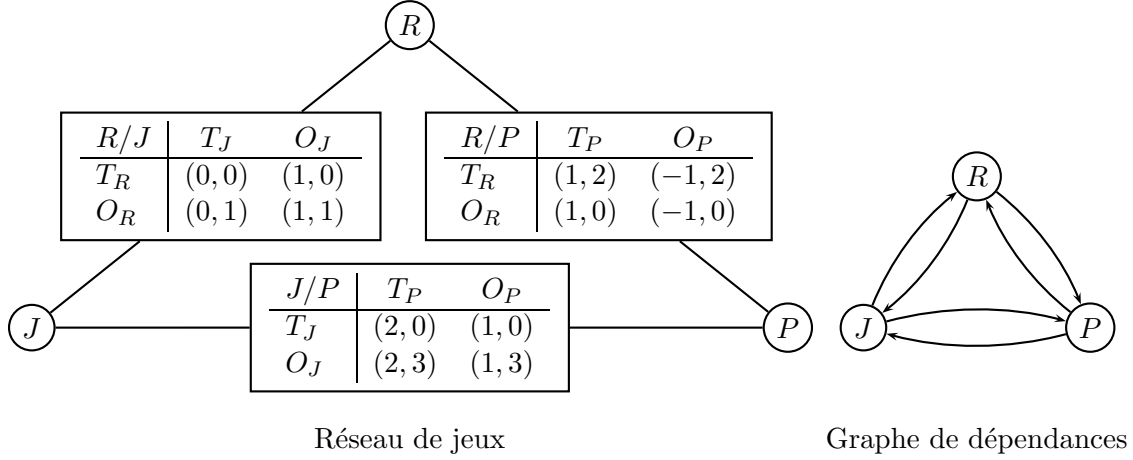


FIG. 3.6 – Réseau de jeux admettant un graphe de dépendances simple

### 3.5.2 Graphe de dépendances simple

Les théorème 3.2 s'intéresse aux réseaux de jeux qui ne contiennent que des agents auto-indépendants.

THÉORÈME 3.2 (GRAPHE DE DÉPENDANCES SIMPLE)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soit  $\mathcal{D}_\Gamma$  son graphe de dépendances. Si  $\mathcal{D}_\Gamma$  est un graphe simple, c'est-à-dire si  $\mathcal{D}_\Gamma$  ne contient que des agents auto-indépendants, alors  $\Gamma$  admet un nombre infini d'équilibres globaux. Plus précisément, toute configuration du réseau est équilibre de Nash :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \Delta(C)$$

PREUVE. La preuve de ce théorème est donnée dans l'annexe D, page 146. ■

EXEMPLE 3.9 (RÉSEAU DE JEUX À GRAPHE DE DÉPENDANCES SIMPLE)

La figure 3.6 présente un réseau de jeux entre Roméo, Juliette et Pâris. Le graphe de dépendance étant simple, toute configuration globale est équilibre global.

### 3.5.3 Agents auto-indépendants à jeux multiples

Le lemme 3.1 et le théorème 3.3 s'intéressent aux rôles des agents auto-indépendants, et à leur influence suivant les jeux auxquels ils participent. Plus précisément, le lemme 3.1 affirme que les agents auto-indépendants ne permettent pas de réduire le nombre d'équilibres de Nash dans un jeu stratégique.

LEMME 3.1 (AGENTS AUTO-INDÉPENDANTS ET NOMBRE D'ÉQUILIBRES)

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Soit  $\mathcal{I} \subseteq A$  l'ensemble des agents auto-indépendants. Alors :

$$\forall \sigma_{\mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \Delta(C_i), \exists \sigma_{- \mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in A - \mathcal{I}} \delta(C_i) \quad (\sigma_{- \mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*) \in \mathbf{Nash}(G)$$

avec  $\forall i \in A \quad (\sigma_{- \mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*)_i = \begin{cases} (\sigma_{\mathcal{I}}^* \uparrow_{\mathcal{I}}^A)_i & \text{si } i \in \mathcal{I} \\ (\sigma_{- \mathcal{I}}^* \uparrow_{A - \mathcal{I}}^A)_i & \text{sinon} \end{cases}$

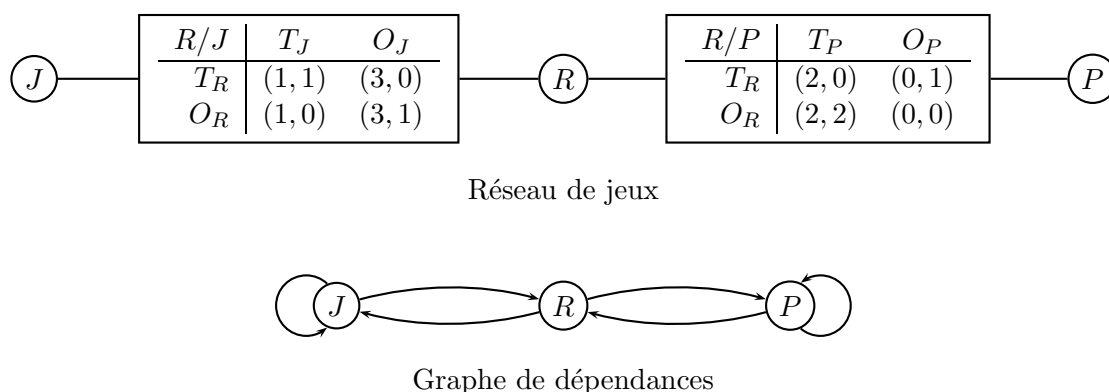


FIG. 3.7 – Réseau de jeu pour illustrer le théorème 3.3

PREUVE. La preuve de ce lemme est donnée dans l'annexe D, page 147. ■

Le théorème 3.3 étend le résultat du lemme au réseaux de jeux, et fournit une condition suffisante à l'existence d'un équilibre global.

**THÉORÈME 3.3 (AGENTS AUTO-INDÉPENDANTS À JEUX MULTIPLES)**

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Si les agents qui participent à plusieurs jeux sont auto-indépendants, alors il existe au moins un équilibre global en stratégies mixtes.

PREUVE. Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme 3.1. ■

**EXEMPLE 3.10**

Considérons le réseau de jeux décrit par la figure 3.7 et son graphe de dépendances. Le seul agent participant à plusieurs jeux est Roméo. Puisque Roméo est auto-indépendant, il est certain qu'un équilibre global existe. De fait, la configuration  $(T_R, T_J, O_P)$  est équilibre global.

Le théorème s'attache donc à la position des agents auto-indépendants. Dans le cas où les joueurs qui participent à plusieurs jeux ne seraient pas auto-indépendants, les deux situations — l'existence ou l'absence d'équilibre global — peuvent se produire. Ainsi, le réseau de la figure 3.1 admet le graphe de la figure 3.3 pour graphe de dépendances. Dans ce réseau, Roméo participe à deux jeux, et n'est pas auto-indépendant. Pour autant, un équilibre global existe. Par contre, si l'on considère le réseau de jeux de la figure 3.5 qui admet *le même* graphe de dépendances, il n'existe pas d'équilibre global.

### 3.6 Comparaison aux modèles de l'état de l'art

Plusieurs modèles ont été présentés dans le chapitre état de l'art sur la localité d'interaction en théorie de jeux (chapitre 2). Nous avons défini le critère de dépendance (d'agents/d'actions, par stratégies/par gains) afin de les hiérarchiser et de les présenter. La figure 3.8 reprend la figure finale du chapitre 2 et y intègre les réseaux de jeux.

Des modèles présentés dans la partie état de l'art, les « Graphical Games » de Kearns, Littman et Singh ([KLS01]) sont certainement les plus proches des réseaux de jeux, non seulement

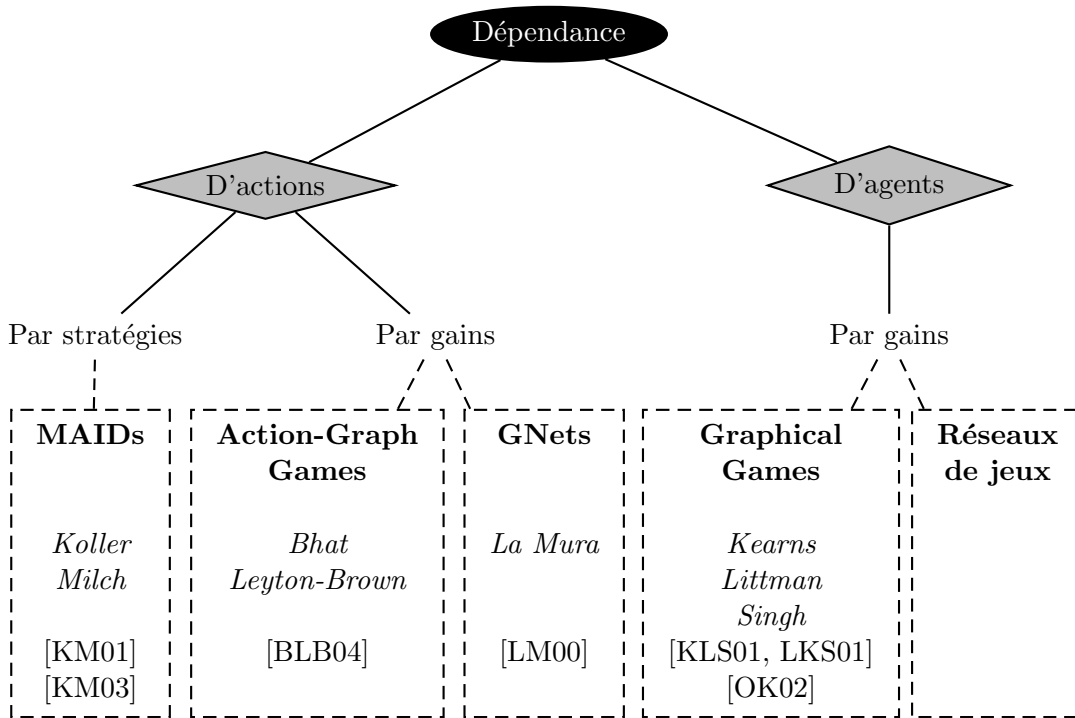


FIG. 3.8 – Vue d’ensemble des interactions locales en théorie des jeux stratégiques.

du fait de la dépendance utilisée (une dépendance d’agents par gains), mais également du fait de la représentation même des jeux.

En effet, dans les réseaux de jeux comme dans les Graphical Games, tous les agents susceptibles d’influencer un joueur donné sont ses voisins, *i.e.* participent à un jeu avec lui. Ainsi, la localité est codée dans la structure même du réseau de jeu ou du Graphical Game.

Cependant, les réseaux de jeux autorisent la séparation des interactions locales en groupes d’interactions. Par exemple, si l’on reprend l’exemple entre Roméo, Juliette et Pâris les réseaux de jeux autorisent la création de deux jeux pour Roméo, un où il joue avec Juliette et un où il joue avec Pâris. Dans le cas des Graphical Games, cette séparation n’est pas possible. Roméo étant influencé à la fois par Juliette et Pâris, il y a nécessairement un jeu auquel Roméo, Juliette et Pâris participent tous les trois. Plus précisément, les Graphical Games peuvent se représenter sous forme de réseau de jeux. Il suffit pour cela de créer pour chaque joueur des Graphical Games un jeu qui le contient lui et ses voisins.

Néanmoins, dans le cas des Graphical Games, chaque joueur se voit attribuer une et une seule table de gains, à l’aide de laquelle il décide de sa stratégie à jouer. Une spécificité des réseaux de jeux (et qu’on ne retrouve dans aucun des autres modèles) est que les joueurs peuvent avoir plusieurs tables de gains à considérer pour optimiser leurs gains. De fait, certains conflits peuvent apparaître et il est possible qu’il n’y ait aucun équilibre global.

Les réseaux de jeux permettent donc de séparer les gains d’un agent en fonction des jeux auxquels il participe. Cette séparation n’est pas définie de manière absolue comme dans les MAIDs de Koller et Milch où elle est additive, ou dans les GNets de La Mura où elle est multiplicative. Cela signifie qu’on ne peut pas, *a priori*, calculer un gain global pour un agent à partir de ses différents gains locaux. Cependant, le chapitre 4 s’intéresse à la modification de

la structure d'un réseau de jeux, *i.e.* à la manière dont les agents sont reliés aux jeux. Nous présentons plus particulièrement des opérateurs permettant de fusionner deux jeux en un seul, ou de séparer un jeu en deux jeux plus petits. Ces opérateurs se fondent sur une fonction dite de jointure qui permet justement le calcul d'un gain global. Nous présentons également, à l'image de ce que font Koller et Milch dans les MAIDs, un algorithme de séparation qui utilise la dépendance pour séparer un jeu stratégique en un réseau de jeux aussi petits que possibles. Les équilibres de Nash du jeu de départ peuvent alors être calculés à partir des équilibres locaux puis globaux du réseau.

Le tableau 3.1 reprend le tableau-résumé du chapitre 2 en y intégrant les réseaux de jeux.

	But	Modèle	Localité	Séparation	Inspiration/Applications
MAIDS : <i>Koller, Milch</i> [KM01, KM03]	Analyse Compacité Équilibres	Variables de chance, de décisions et de gains + graphe	Critère graphique pour calculer la pertinence stratégique	Additive	Problèmes de décision, diagrammes d'influence, modèles probabilistes
GNets : <i>La Mura</i> [LM00]	Compacité Équilibres	Graphe de variables Arcs causals/de préférence Potentiel de gains	Indépendance de gains + Indépendance probabiliste = Indépendance stratégique	Multiplicative	Problèmes de décision, EU Nets
AGG : <i>Bhat</i> <i>Leyton-Brown</i> [BLB04]	Compacité Équilibres	Jeux stratégiques + graphe de voisinage	Graphe de voisinage d'actions	Fonction de gains	Jeux stratégiques
Graphical Games : <i>Kearns, Littman,</i> <i>Singh</i> [KLS01, LKS01, OK02]	Compacité Équilibres	Graphe de voisinage + tables de gains indexée par les voisins	Graphe de voisinage d'agents	Pas de séparation	Jeux stratégiques sous forme normale
Réseaux de jeux	Analyse Équilibres	Plusieurs petits jeux en réseau	Le réseau lui-même ou calcul à partir des gains	Fonction d'observation	Jeux stratégiques sous forme normale

TAB. 3.1 – Synthèse des différents modèles de théorie des jeux stratégiques intégrant la localité d'interactions.



## Chapitre 4

---

---

# RECHERCHE DES INTERACTIONS ÉLÉMENTAIRES PAR LES RÉSEAUX DE JEUX

---

<b>4.1</b>	<b>Structure, équilibres et réseaux de jeux équivalents . . . . .</b>	<b>74</b>
4.1.1	Structure et équilibres . . . . .	74
4.1.2	Réseaux de jeux équivalents . . . . .	75
<b>4.2</b>	<b>Modifier la structure du réseau . . . . .</b>	<b>76</b>
4.2.1	Opérateurs structuraux . . . . .	77
4.2.2	Opérateurs d'observation . . . . .	79
<b>4.3</b>	<b>Modules élémentaires et forme normale . . . . .</b>	<b>83</b>
4.3.1	Modules élémentaires . . . . .	83
4.3.2	Normaliser un réseau de jeu . . . . .	84
<b>4.4</b>	<b>Algorithme de normalisation . . . . .</b>	<b>86</b>
4.4.1	Algorithme de normalisation d'un jeu . . . . .	86
4.4.2	Reconstruire le réseau initial . . . . .	89
4.4.3	Exemple de normalisation d'un jeu à quatre joueurs . . . . .	89
<b>4.5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>91</b>

---

*Dans ce chapitre nous nous intéressons à un résultat important de la théorie des réseaux de jeux, la recherche de modules élémentaire par normalisation du réseau.*

Les réseaux de jeux autorisent la combinaison de plusieurs jeux en un seul réseau. Les joueurs d'un réseau participent alors à plusieurs jeux simultanément et chaque jeu du réseau définit un ensemble d'interactions locales potentielles entre ses agents. De ces interactions résultent éventuellement un situation d'équilibre local. Les différents équilibres locaux peuvent se combiner pour former un ensemble d'équilibres globaux, où chaque agent est en situation d'équilibre local dans tous les jeux auxquels il participe.

Dans les problèmes de modélisation que nous avons traités (voir le chapitre 5), nous nous sommes particulièrement intéressé aux états stables du système modélisé, autrement dit aux

points d'équilibres que le système peut atteindre au bout d'un certain temps. Dans notre modélisation, de tels états correspondent à des configurations d'équilibre. Néanmoins, plusieurs réseaux de jeux peuvent fournir les mêmes équilibres. Ces réseaux se distinguent par leurs structures — la manière dont est construit le réseau et qui définit les interactions qui peuvent avoir lieu — ou par leurs gains. Nous avons alors défini une notion d'équivalence entre réseau de jeux fondée essentiellement sur l'égalité de leurs équilibres globaux.

Des réseaux de jeux ayant des structures différentes peuvent ainsi modéliser la même situation (c'est-à-dire avoir les mêmes équilibres globaux). Bien que les réseaux soient équivalents, leur capacité à rendre compte de la localité d'interaction dépend fortement de la structure. Nous nous sommes alors intéressé à la recherche des *modules élémentaires* composant un réseau. Ces modules élémentaires mettent en évidence les interactions locales du réseau, autrement dit le gain d'un agent du module dépend des stratégies jouées par tous les autres joueurs. Nous proposons un algorithme permettant à partir d'un jeu de calculer une *forme normale* — de *normaliser* le jeu initial — c'est-à-dire de calculer un réseau de jeux équivalent au jeu de départ, et composé de modules élémentaires respectant de plus les dépendances du jeu initial.

La suite du chapitre se découpe de la manière suivante. Dans la section 4.1 nous présentons les liens qui peuvent exister entre la structure d'un réseau de jeux et ses équilibres. La section 4.1.2 présente formellement la notion d'équivalence entre deux réseaux de jeux fondée sur l'égalité de leurs équilibres globaux.

La section 4.2 s'intéresse à la modification de la structure d'un réseau de jeu. Nous avons défini des opérateurs structuraux qui permettent d'ajouter un jeu à un réseau, de supprimer un jeu du réseau, ou de substituer un ensemble de jeux par un autre. Nous avons également défini des opérateurs dits d'observation qui permettent de réunir deux jeux en un seul, ou au contraire de séparer un jeu en deux jeux plus petits. Ils se différencient des opérateurs structuraux car les gains attribués dans les nouveaux jeux sont fonctions des gains des jeux initiaux. Le calcul des nouveaux gains est effectué par une fonction dite de jointure qui permet de calculer le gain global d'un agent à partir de ses gains locaux.

Dans la section 4.3 nous présentons la définition formelle des modules élémentaires, et de la forme normale. Nous nous intéressons alors à la normalisation d'un réseau de jeux, et plus particulièrement aux dépendances que doit maintenir la forme normale.

L'algorithme de normalisation est présenté dans la section 4.4. Nous nous intéressons alors à la reconstruction du réseau de départ à partir de la forme normale. Cette reconstruction se fonde sur l'opérateur de jointure. La section se conclue par l'application de l'algorithme de normalisation sur un réseau à quatre joueurs.

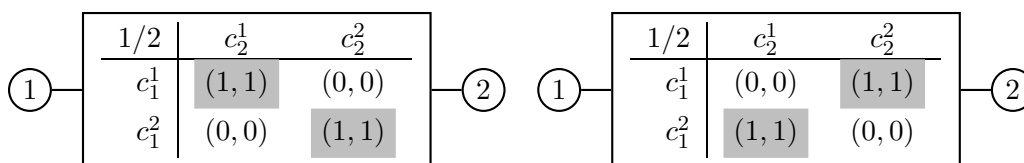
Enfin, la section 4.5 dresse un bilan de ce chapitre.

## 4.1 Structure, équilibres et réseaux de jeux équivalents

### 4.1.1 Structure et équilibres

La notion de structure est une notion propre aux réseaux de jeux, et qui n'existe pas dans le cadre des jeux stratégiques. Elle décrit les interactions qui peuvent avoir lieu dans le réseau, au contraire des équilibres qui décrivent le résultat de ces interactions.

**Structure.** Le terme de *structure* d'un réseau de jeux recouvre la manière dont est construit le réseau. La structure s'intéresse aux relations entre les joueurs et les jeux, il s'agit d'identifier



┆ Dans les tables, les cases grisées représentent les équilibres globaux en stratégies pures.

FIG. 4.1 – Des structures identiques pour des équilibres différents

quels joueurs participent à quels jeux, sans s'intéresser aucunement aux gains des joueurs ou aux éventuels équilibres (locaux ou globaux). Ainsi, si l'on considère la structure du réseau de jeux de la figure 4.2, on retiendra que les joueurs 1 et 2 participent à un même jeu 1/2, et que les joueurs 2 et 3 participent à un autre jeu 2/3.

**Équilibres.** La seule connaissance de la structure d'un réseau ne permet pas de déterminer le résultat des différentes interactions. Les équilibres (locaux et globaux) sont le résultat de ces interactions et dépendent fortement des gains attribués aux différents joueurs. Alors qu'il semble relativement évident que deux réseaux ayant la même structure puissent avoir des configurations d'équilibre différentes, la réciproque est également vraie : deux réseaux de structures différentes peuvent avoir les mêmes équilibres globaux.

**Des structures identiques pour des équilibres différents.** Considérons les réseaux de jeux de la figure 4.1. Ces deux réseaux ont une structure identique, ici réduite à un seul jeu. Par contre leurs équilibres globaux sont totalement différents. Ainsi, si l'on se place dans le cadre des configurations pures, le réseau de gauche admet  $(c_1^1, c_2^1)$  et  $(c_1^2, c_2^2)$  comme équilibres. Au contraire le réseau de droite admet  $(c_1^1, c_2^2)$  et  $(c_1^2, c_2^1)$  en tant que configuration d'équilibre.

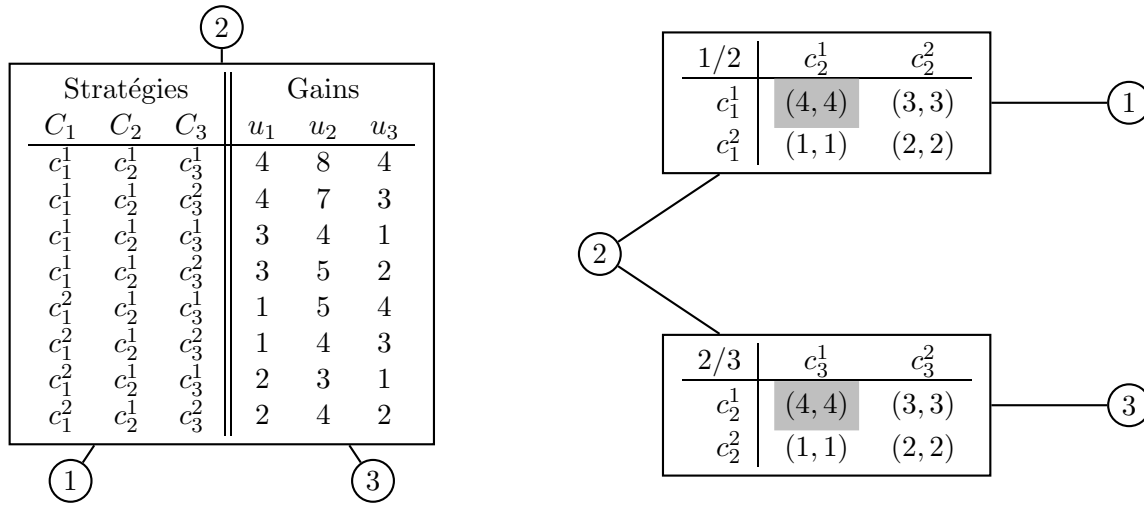
Autrement dit, les deux réseaux modélisent des phénomènes d'interactions similaires — on retrouve dans les deux cas les mêmes agents ayant les mêmes stratégies, et les agents qui interagissent ensemble sont les mêmes, *i.e.* les structures sont les mêmes — mais pour autant, les phénomènes ne sont pas identiques et conduisent à des situation d'équilibres différents.

**Des structures différentes pour des équilibre identiques.** Deux réseaux de jeux peuvent avoir des structures différentes, et pourtant les mêmes équilibres globaux. Considérons ainsi l'exemple de la figure 4.2. Le réseau de gauche est constitué d'un seul jeu à trois joueurs, alors que dans le réseau de droite on retrouve deux jeux à deux joueurs. Cependant, dans les deux cas, le calcul des équilibres globaux donne le même résultat :  $(c_1^1, c_2^1, c_3^1)$ .

Nous avons ici deux modèles différents — ou plus précisément des modèles définissant des interactions différentes entre les mêmes agents — mais dont les interactions permettent d'atteindre les mêmes configurations d'équilibres. Autrement dit, ces deux réseaux peuvent être vus comme des modélisation différentes d'un même phénomène.

#### 4.1.2 Réseaux de jeux équivalents

La notion d'équivalence est utilisée pour qualifier le fait que deux réseaux ayant des structures différentes modélisent des systèmes similaires, des systèmes ayant les mêmes configurations



Les deux réseaux ont des structures différentes mais le même état stable :  $(c_1^1, c_2^1, c_3^1)$ .

FIG. 4.2 – Des structures différentes pour des équilibres identiques

d'équilibres. Trois conditions doivent être vérifiées pour que deux réseaux soient équivalents :

- tout d'abord les réseaux doivent faire intervenir les mêmes joueurs,
- chaque joueur doit de plus avoir les mêmes stratégies dans les deux réseaux,
- enfin, les équilibres globaux des deux réseaux doivent être identiques.

L'équivalence entre deux réseaux de jeux se définit formellement de la manière suivante :

DÉFINITION 4.1 (ÉQUIVALENCE ENTRE DEUX RÉSEAUX DE JEUX)

Soient  $\Gamma^1 = \langle \mathcal{A}^1, C^1, \mathcal{U}^1 \rangle$  et  $\Gamma^2 = \langle \mathcal{A}^2, C^2, \mathcal{U}^2 \rangle$  deux réseaux de jeux. On note  $\Gamma^1 \equiv_{\mathcal{G}} \Gamma^2$  l'équivalence entre  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$  :

$$\langle \mathcal{A}^1, C^1, \mathcal{U}^1 \rangle \equiv_{\mathcal{G}} \langle \mathcal{A}^2, C^2, \mathcal{U}^2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2 \\ C^1 = C^2 \\ \mathcal{G}(\Gamma^1) = \mathcal{G}(\Gamma^2) \end{cases}$$

Ainsi, les deux réseaux de la figure 4.2 ont des structures différentes mais les mêmes équilibres globaux, ils sont donc équivalents. Les deux réseaux modélisent la même situation, mais le réseau de droite rend explicite des interactions locales entre les joueurs 1 et 2 d'une part et 2 et 3 d'autre part.

## 4.2 Modifier la structure du réseau

La modification de la structure d'un réseau de jeu, ou la *restructuration*, s'exprime en termes d'*opérateurs structuraux* que sont l'ajout ou la suppression d'un jeu. La combinaison de ces deux opérations, autrement dit remplacer un groupe de jeux par un autre groupe, est appelée substitution.

L'opérateur de jointure, ainsi que la relation de séparation, sont qualifiés d'*opérateurs d'observation* et diffèrent des opérateurs précédents car ils substituent à un ou plusieurs jeux, un ou plusieurs nouveaux jeux dont *les gains sont fonction des gains des jeux de départ*. La séparation est particulièrement intéressante car elle permet de remplacer un jeu donné par un ensemble de jeux plus petits (en terme de nombre d'agents), éventuellement plus simples à appréhender et à analyser.

### 4.2.1 Opérateurs structuraux

Nous avons défini trois opérateurs structuraux (définition 4.2) :

- L'*opérateur d'ajout* consiste à ajouter un jeu stratégique à un réseau de jeu. Les joueurs du jeu ajouté doivent être des joueurs du réseau. Ils doivent de plus avoir accès aux mêmes stratégies dans le nouveau jeu et dans le réseau.
- L'*opérateur de suppression* consiste à enlever un des jeux stratégiques d'un réseau de jeu.
- L'*opérateur de substitution* consiste à remplacer un ensemble de jeux du réseau par un autre.

Ces opérateurs se focalisent sur la structure d'un réseau et la modifient sans s'intéresser aux gains des différents joueurs. Ils se définissent formellement de la manière suivante :

DÉFINITION 4.2 (OPÉRATEURS STRUCTURAUX)

Soient  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux, et  $U \in \mathcal{U}$  un jeu du réseau  $\Gamma$ . Soit  $U^* = \langle A^*, C^*, u^* \rangle$  un jeu stratégique vérifiant  $A^* \subseteq \mathcal{A}$  d'une part, et  $C_i^* = C_i$  pour tout  $i \in A^*$  d'autre part. Alors :

- L'ajout à  $\Gamma$  du jeu stratégique  $U^*$  est noté  $[+U^*]$ , ou  $[+\langle A^*, u^* \rangle]$ . Le réseau résultant est noté  $\Gamma_{[+U^*]}$ , ou  $\Gamma_{[+\langle A^*, u^* \rangle]}$  :

$$\Gamma_{[+U^*]} = \Gamma_{[+\langle A^*, u^* \rangle]} = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \cup \{\langle A^*, u^* \rangle\} \rangle$$

- La suppression du jeu  $U$  est noté  $[-U]$ . Le réseau résultant est noté  $\Gamma_{[-U]}$  :

$$\Gamma_{[-U]} = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} - \{U\} \rangle$$

- La substitution de  $U$  par  $U^*$  est notée  $[U/U^*]$ . Le réseau résultant est noté  $\Gamma_{[U/U^*]}$  :

$$\Gamma_{[U/U^*]} = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} - \{U\} \cup \{U^*\} \rangle$$

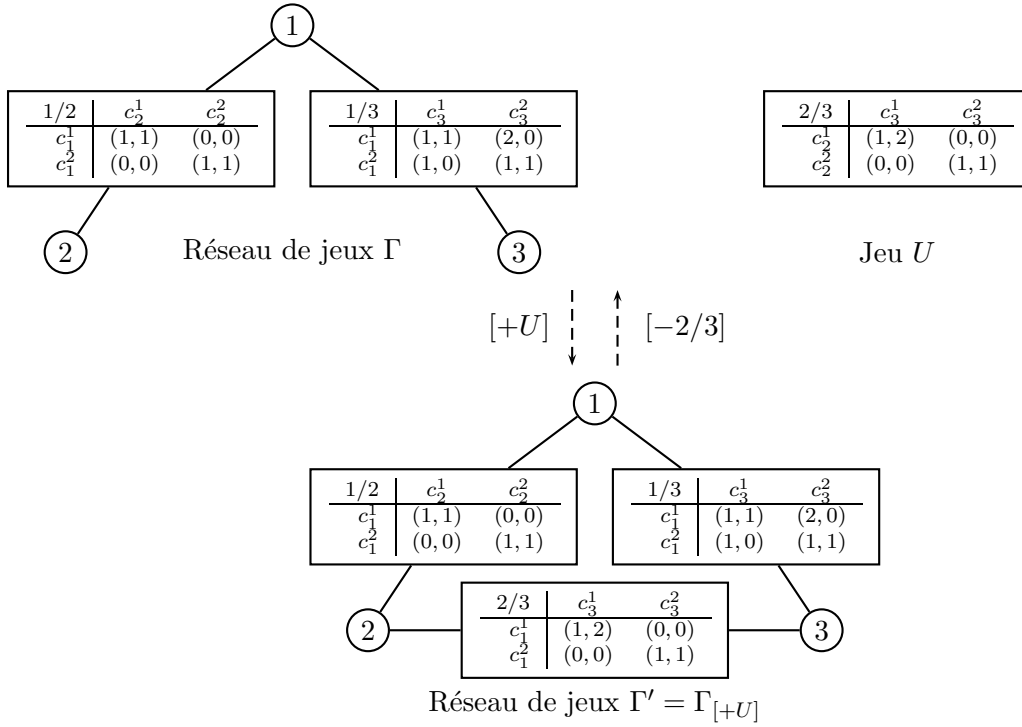
Les opérateurs et notations sont étendus naturellement à l'ajout, la suppression ou la substitution d'un ensemble de jeux.

*Remarque.* La substitution est la combinaison d'un ajout et d'une suppression. Ainsi :

$$\Gamma_{[U/U^*]} = (\Gamma_{[-U]})_{[+U^*]} = (\Gamma_{[+U^*]})_{[-U]}$$

**Ajout, suppression et nombre d'équilibres.** De manière générale, l'ajout d'un jeu dans un réseau permet de réduire le nombre d'équilibres globaux, car le nouveau jeu introduit des contraintes sur les équilibres locaux qui n'étaient pas présentes dans le réseau initial. Et donc :  $\Gamma' = \Gamma_{[+U]} \Rightarrow \mathcal{G}(\Gamma') \subseteq \mathcal{G}(\Gamma)$ .

De manière similaire, la suppression d'un jeu d'un réseau augmente le nombre d'équilibres globaux, car les contraintes créées par le jeu sur les équilibres locaux ne s'appliquent plus. Et donc :  $\Gamma' = \Gamma_{[-U]} \Rightarrow \mathcal{G}(\Gamma') \supseteq \mathcal{G}(\Gamma)$ .



On remarque que le jeu  $U$  apporte de nouvelles contraintes entre les joueurs 2 et 3. De fait, le nombre d'équilibres globaux de  $\Gamma$  diminue lorsqu'on ajoute  $U$ . En particulier  $c = (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{2}[c_2^1] + \frac{1}{2}[c_2^2], [c_3^1]) \in \mathcal{G}(\Gamma)$  mais  $c \notin \mathcal{G}(\Gamma_{+U})$ .

FIG. 4.3 – Illustration de l'ajout et de la suppression de jeux

EXEMPLE 4.1 (AJOUT DE JEUX ET NOMBRE D'ÉQUILIBRES)

La figure 4.3 présente l'ajout d'un jeu à deux joueurs dans un réseau de jeux. Le calcul des équilibres donne les résultats suivants :

- Pour le réseau  $\Gamma$  :
  - $\text{Nash}(1/2) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1]), ([c_1^2], [c_2^2]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{2}[c_2^1] + \frac{1}{2}[c_2^2]) \right\}$
  - $\text{Nash}(1/3) = \left\{ ([c_1^1], [c_3^1]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], [c_3^1]) \right\}$
  - et donc  $\mathcal{G}(\Gamma) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1], [c_3^1]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{2}[c_2^1] + \frac{1}{2}[c_2^2], [c_3^1]) \right\}$
- Pour le jeu  $U$  :
  - $\text{Nash}(U) = \left\{ ([c_2^1], [c_3^1]), ([c_2^2], [c_3^2]), (\frac{1}{3}[c_2^1] + \frac{2}{3}[c_2^2], \frac{1}{2}[c_3^1] + \frac{1}{2}[c_3^2]) \right\}$
- Pour le réseau  $\Gamma'$ , il suffit de combiner les équilibres de  $U$  à ceux de  $\Gamma$  :
  - $\mathcal{G}(\Gamma') = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1], [c_3^1]) \right\}$

On observe bien que  $\mathcal{G}(\Gamma') \subseteq \mathcal{G}(\Gamma)$ , et même  $\mathcal{G}(\Gamma') \subset \mathcal{G}(\Gamma)$ .

EXEMPLE 4.2 (SUBSTITUTION)

La figure 4.4 présente un exemple de deux substitutions. La première remplace le jeu  $U$  entre

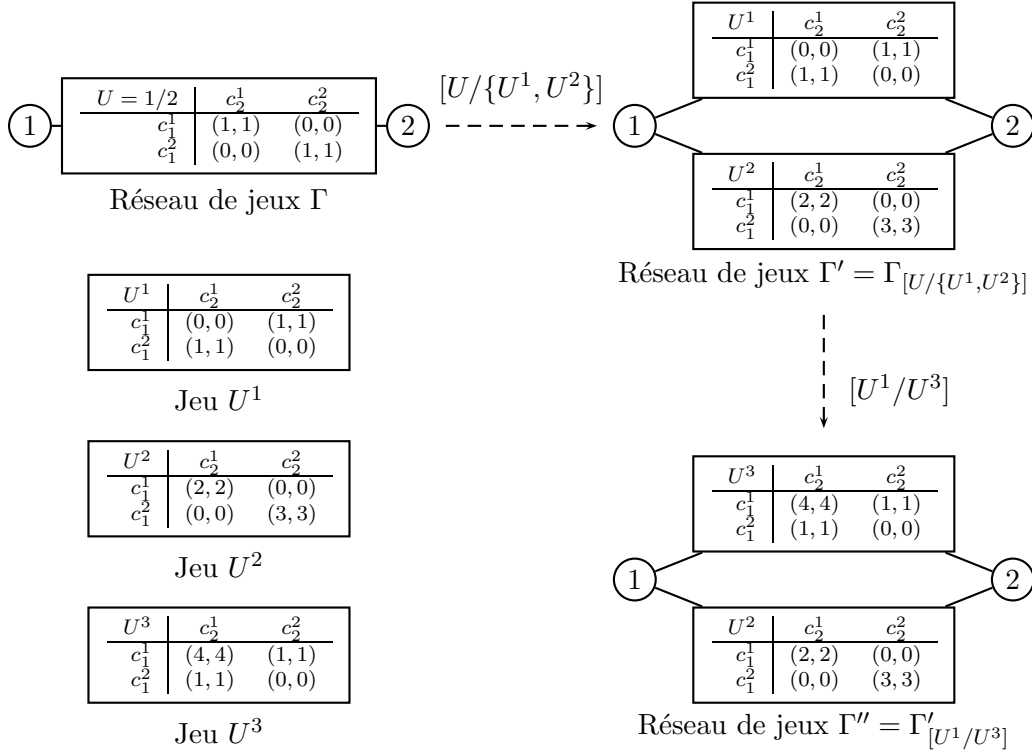


FIG. 4.4 – Illustration de la substitution

les joueurs 1 et 2 par un ensemble de deux jeux  $U^1$  et  $U^2$ . La deuxième substitution se contente de substituer le jeu  $U^1$  par le jeu  $U^3$ .

## 4.2.2 Opérateurs d'observation

Contrairement aux opérateurs précédents, avec les opérateurs d'observation les gains du nouveau jeu sont calculés à partir des gains des anciens jeux. Pour ce faire, il est nécessaire de définir un fonction, dite *fonction de jointure* qui décrit le calcul permettant d'obtenir les nouveaux gains.

### Opérateur de jointure

L'*opérateur de jointure* consiste à réunir deux jeux en un seul, et permet donc de réduire le nombre de jeux d'un réseau.

DÉFINITION 4.3 (JOINTURE SELON  $\omega$ )

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soient  $U_1 = \langle A^1, u^1 \rangle \in \mathcal{U}$  et  $U_2 = \langle A^2, u^2 \rangle \in \mathcal{U}$  deux jeux du réseau. Soit  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de jointure. On rappelle que  $\rho$  est la fonction de projection définie au chapitre 3 (définition 3.5, page 60). On note  $U_1 \bigvee^\omega U_2$  la jointure des jeux  $U_1$  et  $U_2$  :

$$U_1 \bigvee^\omega U_2 = \langle A_1 \cup A_2, u \rangle$$

avec

$$\forall c \in \prod_{i \in (A_1 \cup A_2)} C_i \quad u_i(c) = \begin{cases} u_i^1(\rho(c, A_1)) & \text{si } i \in A_1 - A_2 \\ u_i^2(\rho(c, A_2)) & \text{si } i \in A_2 - A_1 \\ \omega(u_i^1(\rho(c, A_1)), u_i^2(\rho(c, A_2))) & \text{sinon (i.e. si } i \in A_1 \cap A_2) \end{cases}$$

Le réseau résultant de la jointure de  $U^1$  et  $U^2$  est noté  $\Gamma_{[U^1 \vee^\omega U^2]}$

*Remarque.* L'opérateur de jointure tire ses propriétés des propriétés de la fonction de jointure. En particulier, si celle-ci est commutative la jointure le sera également, de même pour l'associativité ou la distributivité.

La fonction de jointure explique comment un agent peut calculer son gain global à partir des gains locaux lui étant attribués dans les différents jeux du réseau. La fonction addition  $(x, y) \mapsto x + y$  peut, par exemple, être candidate en tant que fonction de jointure pour obtenir une définition concrète de l'opérateur  $\vee^\omega$ . Ainsi étant donné un agent  $i$ , si celui-ci ne participe qu'à un seul des deux jeux joints ( $i \in A_1 - A_2$  ou  $i \in A_2 - A_1$ ), son gain dans le jeu final restera inchangé. Par contre si le joueur participe aux deux jeux ( $i \in A_1 \cap A_2$ ), la fonction de jointure est utilisée pour combiner les deux gains.

#### EXEMPLE 4.3 (OPÉRATEUR DE JOINTURE)

La figure 4.5 présente la jointure d'un réseau de jeux à trois joueurs et trois jeux en un réseau à trois joueurs et deux jeux puis en un réseau à un seul jeu. L'addition étant associative, on retrouve le même résultat quelques que soient les deux premiers jeux joints.

Le choix de la fonction de jointure est central car elle modifie les gains du jeu final, et par conséquent les équilibres. La figure 4.6 décrit un exemple illustrant son importance.

### Relation de séparation

La *relation de séparation* autorise l'opération inverse de la jointure. La séparation consiste à « couper » un jeu en deux, elle se définit formellement de la manière suivante :

#### DÉFINITION 4.4 (SÉPARATION SELON $\omega$ )

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soit  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de jointure.

On note  $(\langle A^1, u^1 \rangle, \langle A^2, u^2 \rangle) \in \wedge^\omega U$  la séparation (selon  $\omega$ ) d'un jeu  $\langle A, u \rangle \in \mathcal{U}$  en les jeux  $\langle A^1, u^1 \rangle$  et  $\langle A^2, u^2 \rangle$  :

$$(\langle A^1, u^1 \rangle, \langle A^2, u^2 \rangle) \in \wedge^\omega \langle A, u \rangle \Leftrightarrow \langle A^1, u^1 \rangle \vee^\omega \langle A^2, u^2 \rangle = \langle A, u \rangle$$

Le réseau résultant de la séparation de  $U$  est noté  $\Gamma_{[\wedge^\omega U]}$

Au contraire de la jointure de deux jeux qui fournit un résultat unique, la relation de séparation n'est pas déterministe. En effet, plusieurs groupes de deux jeux peuvent fournir le même résultat une fois joints. Ainsi, comme le montre la figure 4.5, la séparation d'un jeu (ici  $\Gamma'$ ) peut fournir plusieurs solutions (ici  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$ ).



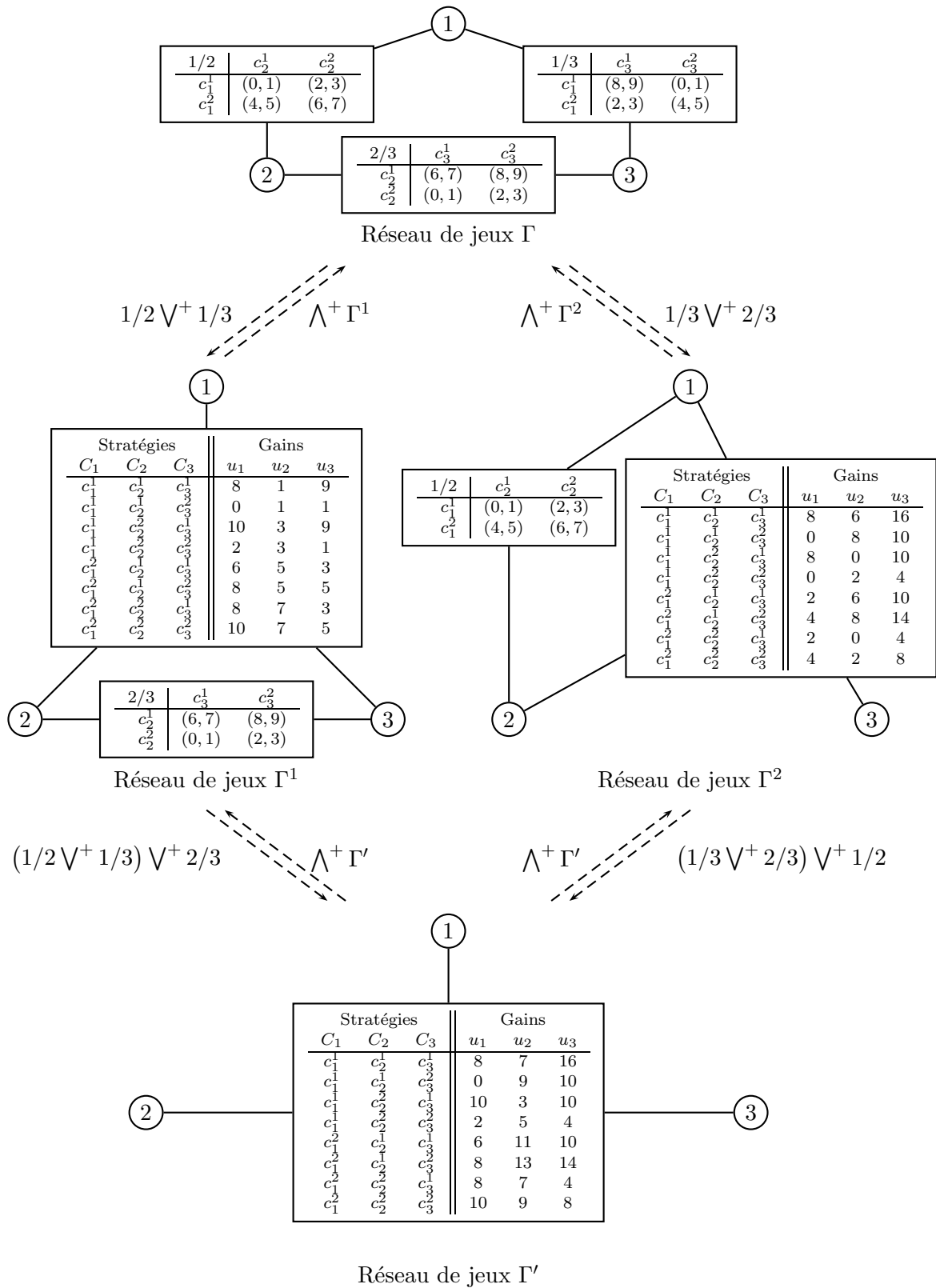


FIG. 4.5 – Jointures et séparations successives.

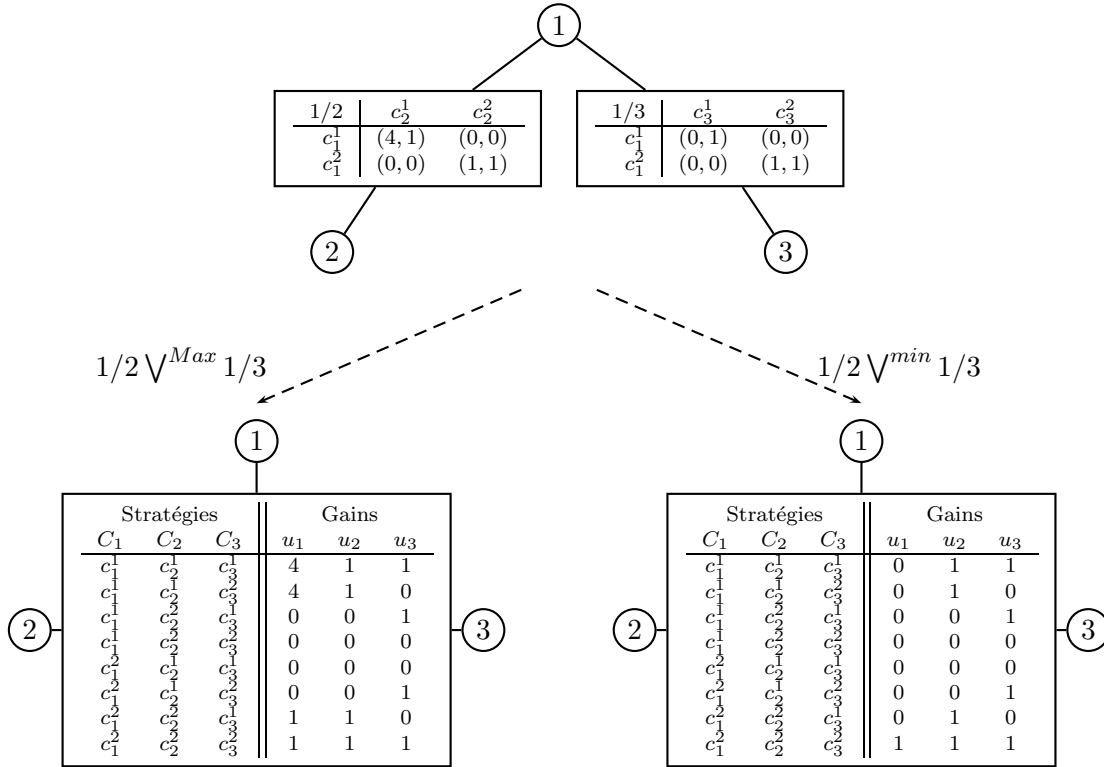


FIG. 4.6 – Un réseau de jeux pour illustrer l'importance de la fonction de jointure.

**Fonction de jointure**

La jointure et la séparation dépendent d'une fonction  $\omega$ , dite fonction de jointure. Pour illustrer son importance, considérons le réseau  $\Gamma$  de la figure 4.6 qui se compose de deux jeux 1/2 et 2/3. La figure présente également les réseaux résultant de la jointure des deux jeux de  $\Gamma$  :

- $\Gamma^{Max}$  est obtenu en utilisant la fonction maximum  $(x, y) \mapsto Max(x, y)$ ,
- $\Gamma^{min}$  est obtenu en utilisant la fonction minimum  $(x, y) \mapsto min(x, y)$ .

Les deux réseaux résultant de la jointure ont bien entendu la même structure. Cependant, si l'on étudie leurs équilibres globaux, des différences apparaissent :

- Pour le réseau de départ  $\Gamma$  :
  - $\mathbf{Nash}(1/2) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1]), ([c_1^2], [c_2^2]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{5}[c_2^1] + \frac{4}{5}[c_2^2]) \right\}$
  - $\mathbf{Nash}(1/3) = \left\{ ([c_1^1], [c_3^1]), ([c_1^2], [c_3^2]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], [c_3^1]) \right\}$
  - et donc  $\mathcal{G}(\Gamma) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1], [c_3^1]), ([c_1^2], [c_2^2], [c_3^2]), (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{5}[c_2^1] + \frac{4}{5}[c_2^2], [c_3^1]) \right\}$
- Pour le réseau joint  $\Gamma^{min}$  :
  - $\mathcal{G}(\Gamma^{min}) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1], [c_3^1]), ([c_1^2], [c_2^2], [c_3^2]) \right\}$
- Pour le réseau joint  $\Gamma^{Max}$  :

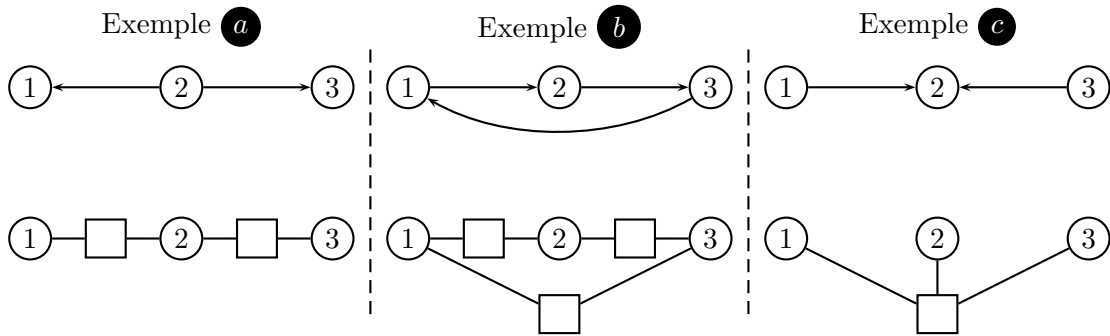


FIG. 4.7 – Graphe de dépendances et modules élémentaires

- on peut déjà noter que  $\mathcal{G}(\Gamma) \subseteq \mathcal{G}(\Gamma^{Max})$
- de plus,  $c = (\frac{1}{2}[c_1^1] + \frac{1}{2}[c_1^2], \frac{1}{5}[c_2^1] + \frac{4}{5}[c_2^2], [c_3^1]) \in \mathcal{G}(\Gamma^{Max})$  et  $c \notin \mathcal{G}(\Gamma)$ .

Nous avons donc pour cet exemple :

$$\mathcal{G}(\Gamma^{min}) \subset \mathcal{G}(\Gamma) \subset \mathcal{G}(\Gamma^{Max})$$

Comme nous pouvons le voir, les réseaux de jeux  $\Gamma$  et ses deux réseaux joints  $\Gamma^{Max}$  et  $\Gamma^{min}$  ont tous des équilibres différents.

### 4.3 Modules élémentaires et forme normale

Plusieurs réseaux de jeux peuvent modéliser la même situation (avoir les mêmes équilibres) sans pour autant posséder la même structure. Bien que les réseaux soient alors équivalents, leur analyse dépend fortement de la structure. En particulier, une structure « en un seul jeu » demande un calcul préalable pour déterminer les interactions locales. La pertinence de la structure, autrement dit sa capacité à rendre compte des interactions locales, est donc essentielle pour l'analyse d'un réseau de jeux.

Plus précisément, nous nous intéressons à la recherche d'une structure permettant de capturer les interactions locales élémentaires du réseau. Un réseau de jeux admettant une telle structure est appelée *forme normale*, et chaque jeu *module élémentaire*.

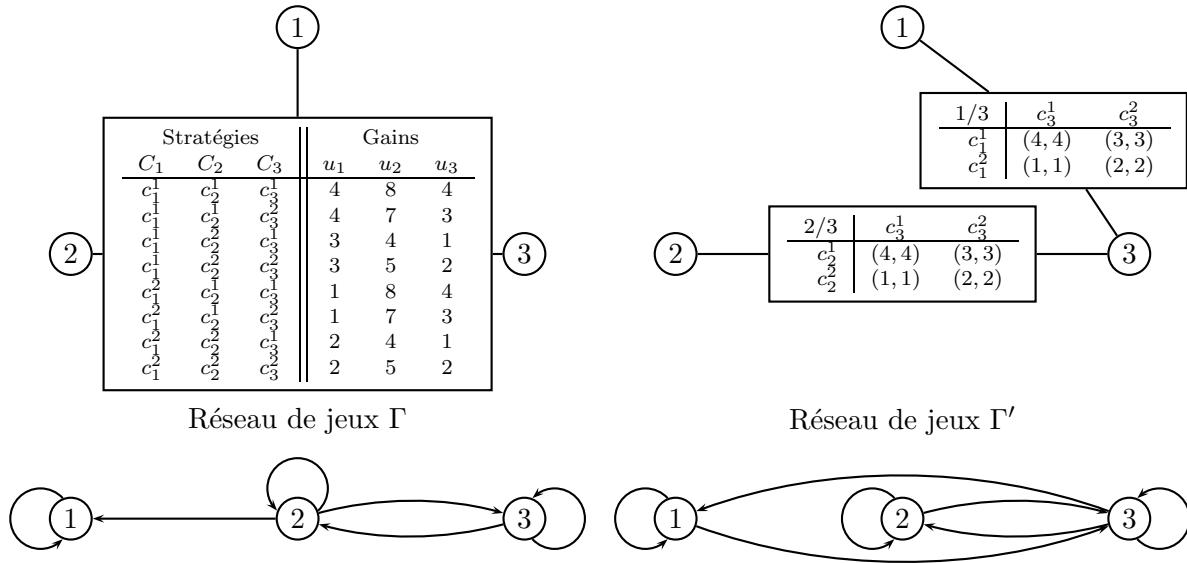
#### 4.3.1 Modules élémentaires

Dans un réseau de jeux les interactions sont analysées au travers de la dépendance d'agents par gains<sup>1</sup>. Un module élémentaire capture les interactions locales d'un réseau de jeux. Il se définit donc par rapport aux dépendances entre ses agents.

La figure 4.7 propose différents graphes de dépendances entre trois joueurs ainsi que les modules élémentaires associés. Dans les exemples (a) et (b), le joueur 3 ne dépend que du joueur 2, un module élémentaire est donc créé pour modéliser cette dépendance. Dans le jeu (c) le joueur 2 dépend à la fois des joueurs 1 et 2. Le module élémentaire correspondant fait donc participer à un même jeu les trois joueurs.

De manière formelle, un jeu est un module élémentaire si au moins un des joueurs dépend de tous les autres.

<sup>1</sup>La notion de dépendance a été formalisée dans le chapitre précédent. Informellement un joueur 1 dépend d'un joueur 2 si les gains de 2 sont modifiés lorsque 1 change seul de stratégie.



Les deux réseaux de jeux ont les mêmes équilibres globaux (il n'en existe qu'un seul dans chaque réseau :  $(c_1^1, c_2^1, c_3^1)$ ), ils sont donc équivalents. Au vue du graphe de dépendances, les jeux de  $\Gamma'$  sont élémentaires.

FIG. 4.8 – Un réseau de jeux et une forme normale équivalente

DÉFINITION 4.5 (MODULE ÉLÉMENTAIRE)

Soient  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux et  $\langle A, u \rangle \in \mathcal{U}$  un jeu du réseau.

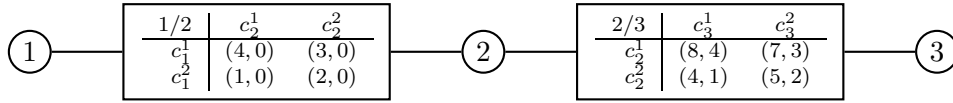
$$\langle A, u \rangle \text{ est élémentaire} \Leftrightarrow \exists i \in A, \forall j \in A - \{i\} \quad j \delta_u i$$

Les modules élémentaires capturent l'influence d'un ensemble de joueurs sur un agent. Une séparation du module élémentaire nécessiterait un découplage de l'influence de ces joueurs. Ainsi, si l'on calcule le graphe de dépendance du réseau  $\Gamma'$  de la figure 4.5 (page 81), on s'aperçoit que chaque agent est dépendant des deux autres. Bien que la figure 4.5 présente également le réseau  $\Gamma$  obtenue par séparation successive de  $\Gamma'$ , cette séparation n'a pu être faite qu'en découplant les influences des différents joueurs. Dans  $\Gamma'$  le joueur 1 est soumis à l'influence conjointe des joueurs 2 et 3. Dans le réseau  $\Gamma$ , 1 est influencé d'une part par 2 et d'autre part par 3. Mais sans connaissance *a priori*, cette séparation ne correspond pas à une décomposition en modules élémentaires, en fait, le réseau  $\Gamma'$  est déjà un module élémentaire.

4.3.2 Normaliser un réseau de jeu

Identifier un réseau de jeux en tant que forme normale, et normaliser un réseau de jeux sont deux problèmes différents. Dans le premier cas, il suffit de vérifier que chaque jeu du réseau est élémentaire. Dans le deuxième cas il faut construire un nouveau réseau, équivalent au réseau initial, et composé uniquement de modules élémentaires.

Cependant la normalisation d'un réseau de jeux conduit à trouver non seulement un réseau élémentaire équivalent, mais également à rendre explicite les interactions locales élémentaires. Considérons ainsi la figure 4.8 qui présente un réseau de jeux  $\Gamma$  et une forme normale équivalente à  $\Gamma$  :  $\Gamma'$ . La figure présente également les graphes de dépendances associés à chaque réseau.

FIG. 4.9 – Normalisation du réseau  $\Gamma$  de la figure 4.8

Le joueur 1 est influencé par 2 dans le réseau de départ  $\Gamma$ , néanmoins ce n'est pas le cas dans le réseau  $\Gamma'$ . On note même que 1 influence et est influencé par 3 dans  $\Gamma'$ , alors qu'aucune de ces dépendances n'apparaît dans  $\Gamma$ . En fait, bien que  $\Gamma'$  soit une forme normale équivalente à  $\Gamma$ , elle ne correspond pas à une normalisation de  $\Gamma$  car elle ne capture pas les interactions élémentaires du réseau. Ainsi, il est nécessaire que la normalisation d'un réseau conserve les dépendances du réseau de départ au sens de la définition 4.6.

**DÉFINITION 4.6 (CONSERVATION (FORTE) DES DÉPENDANCES)**

Soient  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  et  $\Gamma^* = \langle \mathcal{A}^*, C^*, \mathcal{U}^* \rangle$  deux réseaux de jeux tels que  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$  et  $C^* = C$ .  $\Gamma^*$  conserve (fortement) les dépendances de  $\Gamma$  si, et seulement si :

$$\forall \langle A, u \rangle \in \mathcal{U}, \forall i \in A, \exists \langle A^*, u^* \rangle \in \mathcal{U}^* \quad \delta_{u^*}^-(i) = \delta_u^-(i)$$

La normalisation d'un réseau de jeux peut alors se définir comme la recherche d'une forme normale équivalente conservant les dépendances.

**DÉFINITION 4.7 (NORMALISER UN RÉSEAU DE JEU)**

Normaliser un réseau de jeu  $\Gamma$  consiste à trouver un réseau de jeu  $\Gamma^*$  tel que :

- $\Gamma^*$  est équivalent à  $\Gamma$ ,
- $\Gamma^*$  est une forme normale (i.e. composée de modules élémentaires),
- $\Gamma^*$  conserve fortement les dépendances de  $\Gamma$ .

La figure 4.9 propose une normalisation du réseau  $\Gamma$  de la figure 4.8. On observe un jeu entre 2 et 3 qui correspond à l'interdépendance des joueurs. Puisque le joueur 1 dépend du joueur 2 mais pas du joueur 3 on observe également un jeu entre 1 et 2.

**Unicité de la normalisation.** Formellement, la normalisation n'est pas unique. En effet, les équilibres de Nash d'un jeu (et donc les équilibres globaux d'un réseau de jeux) ne dépendent pas directement des gains d'un joueur, mais du rapport entre ceux-ci. Si tous les gains d'un joueur sont multipliés par un même coefficient, les équilibres de Nash restent inchangés. De fait, on peut alors normaliser différemment un réseau de jeux suivant la politique d'attribution des gains.

Il est également possible de créer des réseaux de jeux tels  $\Gamma^1$  ou  $\Gamma^2$  de la figure 4.5 (page 81). Dans ces deux réseaux, on observe d'une part un jeu à trois joueurs (1, 2 et 3), et d'autre part, des « sous-jeux » auxquels participent un sous ensemble de ces trois joueurs (2 et 3 dans le cas de  $\Gamma^1$  ou 1 et 2 dans le cas de  $\Gamma^2$ ). En fait, on peut à partir d'une forme normale (e.g.  $\Gamma'$ ) issue

de la normalisation d'un réseau initial construire un autre réseau (*e.g.*  $\Gamma^1$  ou  $\Gamma^2$ ) en ajoutant des sous-jeux respectant les contraintes imposées aux joueurs dans la forme normale (et qui imposent les équilibres globaux). Ce nouveau réseau sera alors une forme normale équivalente au réseau de départ, et conservant les dépendances.

En ce qui concerne l'algorithme de normalisation que nous proposons dans la section suivante, la forme normale que nous construisons est telle que le nombre de jeux est minimum (il n'y a aucun sous-jeu). Notre politique d'attribution des gains implique qu'ils seront soit égaux à ceux du jeu de départ, soit d'une valeur arbitrairement choisie, et notée  $\varepsilon$ .

## 4.4 Algorithme de normalisation

L'algorithme de normalisation opère sur chacun des jeux du réseau de départ, et les normalise. La normalisation du réseau est alors obtenue en substituant à chacun des jeux du réseau leur normalisation.

La décomposition d'un jeu en modules élémentaires s'effectue en étudiant les dépendances entre les joueurs, et en créant des modules tels que si un agent est dépendant d'un ensemble de joueurs dans le jeu de départ, alors il existe un module élémentaire qui contient cet agent et ces joueurs, et qui respecte les dépendances de départ. La méthode de décomposition s'inspire des opérateurs d'observation présentés dans la section 4.2. En particulier, la reconstruction du jeu de départ à partir des modules élémentaires peut s'effectuer par jointure successives de ces modules. L'algorithme est tel que le choix de la fonction de jointure a peu d'importance, du moment que celle-ci admet un élément neutre. En ce qui concerne les gains, notre politique est de conserver autant que possible les valeurs des gains du jeu de départ. Intuitivement, la forme normale sera telle que pour un joueur donné, ses gains seront « concentrés » dans quelques uns des modules (généralement un seul). Tous les autres modules se verront attribuer pour gains l'élément neutre de la fonction de jointure.

### 4.4.1 Algorithme de normalisation d'un jeu

L'algorithme de la figure 4.10 se fonde sur les relations de dépendances pour calculer dans un premier temps la structure du réseau final et dans un deuxième temps attribuer les gains.

#### Calcul de la structure

La première étape consiste à étudier le graphe de dépendances pour déterminer la structure de la forme normale :

- Dans un premier temps, pour chaque agent  $i \in A$  du jeu de départ  $G = \langle A, C, u \rangle$ , on crée un module  $m = \langle A^m, u^m \rangle$  le contenant lui et l'ensemble de ses prédécesseurs dans le graphe de dépendances ( $\delta_u^-(i)$ ), *i.e.* le contenant lui et l'ensemble des joueurs qui l'influencent.
- Dans un deuxième temps, cette structure se simplifie pour ne pas créer de modules ayant le même ensemble de joueurs, ou de modules dont les joueurs seraient inclus dans un module plus grand. Ainsi, étant donnés  $m = \langle A^m, u^m \rangle$  et  $n = \langle A^n, u^n \rangle$ , deux modules on ne pourra avoir ni  $A^m \subseteq A^n$ , ni  $A^n \subseteq A^m$ . Cette étape permet de réduire le nombre de modules, et d'éviter une redondance d'information.

#### Attribution des gains

Cette seconde étape se fonde sur les propriétés de la structure calculée à l'étape précédente pour attribuer les gains aux différents joueurs. Considérons ainsi le jeu initial  $G = \langle A, C, u \rangle$ ,

```

Algo Normalise( $\langle A, C, u \rangle$  : un jeu)
 $\mathcal{U} := \emptyset$ ;
 $m := 0$ ;

/* Calcul de la structure */
POUR TOUT  $i \in A$  FAIRE
  |  $m := m + 1$ ;
  |  $A^m := i \cup \delta_u^-(i)$ ;
FINPOURTOUT
 $M = [1 : m]$ ;
POUR TOUT  $m' \in [1 : m]$  FAIRE
  |  $M := M - \{m'' \in M \mid A^{m''} \subset A^{m'} \vee (A^{m'} = A^{m''} \wedge m'' < m')\}$ ;
FINPOURTOUT

/* Attribution des gains */
POUR TOUT  $m \in M$  FAIRE
  | POUR TOUT  $i \in A^m$  FAIRE
    | SI  $\delta_u^-(i) \subseteq A^m$  ALORS
      | POUR TOUT  $c^m \in \prod_{j \in A^m} C_j$  FAIRE
        | |  $u_i^m(c^m) := \mathbf{Gains}(c^m, i)$ ;
        | FINPOURTOUT
      | SINON
        | POUR TOUT  $c^m \in \prod_{j \in A^m} C_j$  FAIRE
          | |  $u_i^m(c^m) := \varepsilon$ ;
          | FINPOURTOUT
        | FINSI
      | FINPOURTOUT
    |  $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{\langle A^m, u^m \rangle\}$ ;
  | FINPOURTOUT
RETOURNER  $\langle A, C, \mathcal{U} \rangle$ ;

```

On rappelle que **Gains** est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{Gains} : \prod_{j \in A^m} C_j \times A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(c^m, i) \mapsto u_i(c) \text{ avec } c \in \prod_{j \in A} C_j \text{ telle que } \rho(c, A^m) = c^m$$

FIG. 4.10 – Algorithme de normalisation d'un jeu

$m = \langle A^m, u^m \rangle$  un module élémentaire, et  $i \in A^m$  un agent participant à ce module.

- Si tous les prédécesseurs de  $i$  participent au module  $m$  (si  $\delta_u^-(i) \subseteq A^m$ ), il est possible de récupérer le gain directement dans le jeu initial. En effet, puisque tous les prédesseurs de  $i$  sont dans  $m$ , aucun des joueurs manquant ne peut modifier le gain de  $i$ . Plus formellement, quelque soit le jeu  $\langle A^*, C^*, u^* \rangle$ , nous avons :

$$\forall (\sigma, \sigma') \in \Delta(C^*)^2, \forall j \in A^* \quad \left( \rho(\sigma, \delta_{u^*}^-(j)) = \rho(\sigma', \delta_{u^*}^-(j)) \Rightarrow u_j^*(\sigma) = u_j^*(\sigma') \right)$$

Donc, étant donnée une configuration pure  $c^m \in \prod_{j \in A^m} C_j$  de  $m$ , toutes les configurations pures  $c \in \prod_{j \in A} C_j$  de  $G$  telles que la projection de  $c$  sur les agents de  $m$  soit égale à  $c^m$  attribueront le même gain à l'agent  $i$ . Formellement :

$$\forall c^m \in \prod_{j \in A^m} C_j, \exists v \in \mathbb{R}, \forall c \in \prod_{j \in A} C_j \quad \left( \rho(c, A^m) = c^m \Rightarrow u_j(c) = v \right)$$

La fonction **Gains** dont il est question dans l'algorithme de la figure 4.10 recherche dans le jeu de départ  $G$  une configuration vérifiant ces conditions de projection, et attribue son gain au joueur  $i$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Gains} : \prod_{j \in A^m} C_j \times A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (c^m, i) &\mapsto u_i(c) \text{ avec } c \in \prod_{j \in A} C_j \text{ telle que } \rho(c, A^m) = c^m \end{aligned}$$

- Si un des prédécesseurs de  $i$  ne participe pas au module  $m$ , on ne peut pas trouver de gain unique dans le jeu de départ  $G$ . Nous attribuons alors un gain arbitraire noté  $\varepsilon$ . Tous les gains de  $i$  dans le jeu que nous construisons sont donc égaux à  $\varepsilon$ . De fait, nous ne créons pas de contrainte sur le joueur  $i$  qui est libre, dans ce jeu, de choisir n'importe quelle stratégie pour maximiser son gain. Ainsi, nous ne réduisons pas l'ensemble des équilibres de Nash possibles.

## Preuve de l'algorithme

L'algorithme présenté figure 4.10 construit un réseau de jeux normalisant le jeu initial comme l'exprime le théorème 4.1.

### THÉORÈME 4.1 (ALGORITHME DE NORMALISATION)

Soient  $G$  un jeu stratégique et  $\Gamma$  le réseau de jeux calculé en appliquant l'algorithme de normalisation sur  $G$ . Alors  $\Gamma$  est une normalisation de  $G$  i.e. une forme normale, équivalente à  $G$ , conservant fortement les dépendances de  $G$ .

PREUVE. La preuve de ce théorème est présentée dans l'annexe D, page 148. ■

## Complexité

La complexité de l'algorithme est proportionnelle au nombre de configurations pures de jeux. Si le jeu se constitue de  $n$  joueurs, chaque joueur ayant  $p$  stratégies, la complexité est alors  $n^2 \times p^n$ . Cependant, la complexité est  $n^2$  si chaque agent dépend de tous les autres, autrement dit si le jeu est déjà sous forme de module élémentaire. La complexité  $n^2 \times p^n$  n'est obtenue qu'avec des jeux où les agents sont fortement indépendants les uns des autres. Dans ce cas, le jeu est hautement séparable, et la complexité du calcul des équilibres globaux est alors réduite car le nombre de joueurs par jeu est faible.



		Stratégies				Gains			
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
1		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-4	-1	2	-2
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	3	11	2	5
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-4	-1	1	-2
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	3	11	1	5
4		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-4	9	13	6
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	3	4	13	15
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-4	9	-3	6
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	3	4	-3	15
2		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	7	-1	2	-2
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-5	11	2	5
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	7	-1	1	-2
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-5	11	1	5
3		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	7	9	13	6
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-5	4	13	15
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	7	9	-3	6
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	-5	4	-3	15

FIG. 4.11 – Un jeu à quatre joueurs pour illustrer l'algorithme de normalisation

#### 4.4.2 Reconstruire le réseau initial

L'algorithme de normalisation s'inspire de la séparation. Il est alors possible de reconstruire le réseau initial à partir de la forme normale par jointures successives. Nous n'avons pas spécifié de fonction de jointure dans l'algorithme et, de fait, toute fonction admettant un élément neutre<sup>2</sup> est compatible. En effet, l'algorithme de normalisation est tel que les joueurs se voient attribuer pour gains soit un gain égal au gain du jeu initial, soit un gain noté  $\varepsilon$ , et correspondant justement à l'élément neutre de la fonction de jointure.

La jointure pour les fonctions admettant un élément neutre se définit de la manière suivante :

**DÉFINITION 4.8 (JOINTURE AVEC ÉLÉMENT NEUTRE)**

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soient  $U^1 = \langle A^1, u^1 \rangle \in \mathcal{U}$  et  $U^2 = \langle A^2, u^2 \rangle \in \mathcal{U}$  deux jeux du réseau. Soit  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de jointure admettant  $\varepsilon$  pour élément neutre. Alors  $U_1 \vee^\omega U_2 = \langle A_1 \cup A_2, u \rangle$  avec

$$\forall c \in \prod_{i \in (A^1 \cup A^2)} C_i, \quad \forall i \in A^1 - A^2 \quad u_i(c) = u_i^1(\rho(c, A^1))$$

$$\forall i \in A^2 - A^1 \quad u_i(c) = u_i^2(\rho(c, A^2))$$

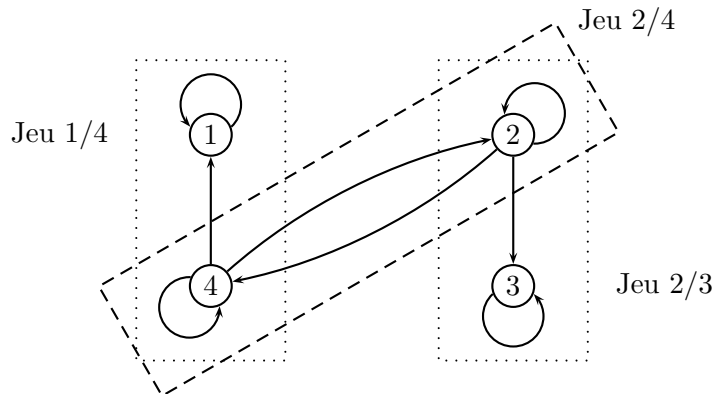
$$\forall i \in A^1 \cap A^2 \quad u_i(c) = \begin{cases} u_i^2(\rho(c, A^2)) & \text{si } u_i^1(\rho(c, A^1)) = \varepsilon \\ u_i^1(\rho(c, A^1)) & \text{si } u_i^2(\rho(c, A^2)) = \varepsilon \\ u_i^1(\rho(c, A^2)) & \text{si } u_i^1(\rho(c, A^1)) = u_i^2(\rho(c, A^1)) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

#### 4.4.3 Exemple de normalisation d'un jeu à quatre joueurs

**Normalisation.** Nous allons appliquer l'algorithme de normalisation sur le jeu  $G = \langle A, C, u \rangle$  de la figure 4.11 :

- **Dépendances.** Les dépendances calculées à partir de la table de gains sont résumées par le graphe de dépendances de la figure 4.12. On peut remarquer en particulier que les agents

<sup>2</sup>On rappelle que  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  est élément neutre pour la fonction  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si, et seulement si :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \omega(x, \varepsilon) = \omega(\varepsilon, x) = x$



Les cadres en pointillés représentent les jeux qui seront créés par l'algorithme de normalisation.

FIG. 4.12 – Graphe de dépendances du jeu de la figure 4.11

2 et 4 dépendent mutuellement l'un de l'autre, alors que l'agent 1 ne dépend que de l'agent 4, et l'agent 3 ne dépend que de l'agent 2.

- **Structure.** Pour chaque joueur, l'algorithme crée un jeu le contenant lui et tous ces prédécesseurs. Ainsi, il crée :

- le jeu 1/4 pour les joueurs 1 et 4 en analysant les dépendances du joueur 1,
- le jeu 2/4 pour les joueurs 2 et 4 en analysant les dépendances du joueur 2,
- le jeu 2/3 pour les joueurs 2 et 3 en analysant les dépendances du joueur 3,

L'analyse des dépendances du joueur 4 implique la création d'un jeu entre 2 et 4 qui existe déjà. La figure 4.12 montre la sélection des jeux à créer à partir du graphe de dépendances.

- **Gains.** L'algorithme attribue les gains de la manière suivante :

- Pour le jeu 1/4 : tous les prédécesseurs de 1 sont présents, on lui attribue donc des gains issus du jeu initial ; il manque le joueur 2 qui influence 4, les gains de 4 sont donc tous égaux à  $\varepsilon$ .
- Pour le jeu 2/3 : il manque le joueur 4 qui influence 2, les gains de 2 sont donc tous égaux à  $\varepsilon$  ; tous les prédécesseurs de 3 sont présents, on lui attribue donc des gains issus du jeu initial.
- Pour le jeu 2/4 : tous les prédécesseurs de 2 et 4 sont présents, on leur attribue donc des gains issus du jeu initial.

La figure 4.13 présente la forme normale obtenue.

**Équilibres.** Le calcul des équilibres de Nash du jeu initial  $G$  peut alors être réalisé en calculant les équilibres globaux du réseau normalisé  $\Gamma$  :

- Équilibres locaux :

- Pour le jeu 1/4

$$\mathbf{Nash}(1/4) = \left\{ ([c_1^1], [c_4^2]), ([c_1^2], [c_4^1]) \right\} \cup \left\{ (\sigma_1, \frac{8}{19}[c_4^1] + \frac{11}{19}[c_4^2]) \mid \sigma_1 \in \Delta(C_1) \right\}$$

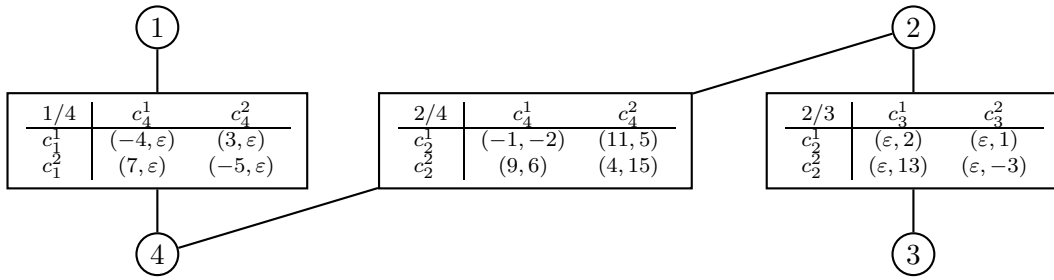


FIG. 4.13 – Forme normale du jeu de la figure 4.11 obtenue par l’algorithme de normalisation

- Pour le jeu 2/3

$$\mathbf{Nash}(2/3) = \left\{ ([c_2^1], [c_3^1]), ([c_2^2], [c_3^1]) \right\} \cup \left\{ \left( \frac{3}{4}[c_2^1] + \frac{1}{4}[c_2^2], \sigma_3 \right) \mid \sigma_3 \in \Delta(C_3) \right\}$$

- Pour le jeu 2/4

$$\mathbf{Nash}(2/4) = \left\{ ([c_2^1], [c_4^2]) \right\}$$

- Équilibres globaux :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \left\{ ([c_1^1], [c_2^1], [c_3^1], [c_4^2]) \right\}$$

## 4.5 Bilan

Dans ce chapitre nous sommes intéressé à la recherche des interactions élémentaires d’un réseau de jeux. En effet, en considérant que les équilibres globaux d’un réseau de jeux permettent de capturer les états stables du système modélisé, il apparaît que plusieurs modélisations peuvent mener aux mêmes états stables. Autrement dit, deux réseaux de jeux faisant intervenir les mêmes agents mais dans des interactions différentes — *i.e.* deux réseaux ayant des structures différentes — peuvent cependant posséder les mêmes équilibres globaux. De tels réseaux sont dits *équivalents*.

*Se pose alors la question, étant donné un jeu initial, d’exhiber une représentation capable à la fois de capturer les mêmes configurations d’équilibres que le jeu de départ tout en modélisant « au mieux » les interactions locales inhérentes au réseau.*

Pour répondre à cette question nous nous sommes intéressé aux opérateurs autorisant la modification de la structure du réseau, et en particulier la jointure et la séparation. Nous avons alors défini de manière formelle la notion de modules élémentaires. Cette définition se fonde sur la notion de dépendance qui permet de déterminer si un agent en influence un autre. *Dans un module élémentaire, au moins un des agents est influencé par tout les autres.* Ainsi, la séparation de ce module entraînerait nécessairement la perte d’une partie des interactions locales. Plus précisément, il est possible de séparer un module élémentaire, mais sous la seule condition de découpler l’influence des agents.

Fondé sur la notion de modules élémentaires, nous avons proposé un algorithme de normalisation d’un jeu. Cet algorithme recherche un réseau de jeux composé uniquement de modules élémentaires, autrement dit une *forme normale*. Le réseau de jeux doit de plus être équivalent au

jeu initial et en conserver les dépendances (*i.e.* les interactions locales). L'algorithme de normalisation s'appliquent sur un jeu. La normalisation d'un réseau de jeux est obtenue en normalisant chacun des jeux qui composent le réseau.

Deux étapes composent l'algorithme de normalisation. Dans la première nous étudions les dépendances du jeu initial afin de déterminer la structure de la forme normale. Dans un deuxième temps, nous nous fondons sur cette structure pour attribuer les gains aux différents joueurs.

Étant donné un joueur, deux types de jeux existe alors dans le réseau normalisé :

- soit le jeu contient tous les agents influençant le joueur et dans ce cas son gain peut être calculé directement à partir de son gain initial,
- soit un des agents dont dépend le joueur est manquant, et nous lui attribuons un gain arbitraire et noté  $\varepsilon$ .

L'attribution des gains en fonction des deux types de jeux est telle qu'il est possible de retrouver le jeu initial en fusionnant deux à deux les différents jeux du réseau normalisé à l'aide de l'opérateur de jointure.

La normalisation d'un réseau de jeux met en valeur la notion de groupe atomique d'interactions, c'est-à-dire de modules élémentaires. De plus, les équilibres étant conservés, il est possible de les calculer à partir du réseau normalisé, profitant ainsi de la taille réduite des jeux pour diminuer la complexité du calcul.





## TROISIÈME PARTIE

---

---

# APPLICATIONS ET DÉVELOPPEMENT





## Chapitre 5

---

---

# RÉSEAUX DE RÉGULATION GÉNÉTIQUE ET RÉSEAUX DE JEUX

---

<b>5.1</b>	<b>Régulation génétique</b>	<b>98</b>
5.1.1	Mécanismes d'expression : des gènes aux protéines	98
5.1.2	Notions de régulation	100
5.1.3	Dynamique des réseaux de régulation génétique	102
<b>5.2</b>	<b>Le jeu de régulation</b>	<b>106</b>
5.2.1	Modélisation des régulations élémentaires	106
5.2.2	Modélisation des circuits élémentaires de régulation	107
5.2.3	Un petit réseau de circuits élémentaires	108
<b>5.3</b>	<b>Régulation de la division cellulaire</b>	<b>110</b>
5.3.1	Le modèle biologique	110
5.3.2	Modélisation par les réseaux de jeux	113
<b>5.4</b>	<b><i>Arabidopsis thaliana</i></b>	<b>114</b>
5.4.1	Le modèle biologique	114
5.4.2	Modélisation par les réseaux de jeux	115
<b>5.5</b>	<b>Bilan</b>	<b>120</b>

---

*Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'utilisation de la théorie des réseaux de jeux pour modéliser les phénomènes de régulation génétique.*

Les réseaux de jeux peuvent s'appliquer comme modèle à l'analyse de la dynamique des réseaux de régulation génétique. Ces réseaux décrivent des interactions entre gènes, et en particulier l'influence que peut avoir l'état d'un gène sur l'état des autres gènes.

L'objet de notre modélisation est de définir un réseau de jeux dont les équilibres globaux correspondent aux états stables du réseau de régulation. Sa conception conduit à définir les joueurs, les stratégies et les gains pour chaque jeu du réseau. Plus précisément, les joueurs correspondent aux « objets » biologiques à l'origine des interactions, autrement dit les gènes ; les stratégies

décrivent les différentes capacités d'influence des gènes ; et les gains modélisent la dynamique du réseau de régulation. Nous proposons une règle d'attribution définissant les gains pour les régulations élémentaires (l'influence d'un gène sur un autre gène). Les jeux correspondant à ces régulations élémentaires peuvent alors être assemblés pour constituer des réseaux de jeux modélisant les circuits élémentaires (deux gènes s'influencent mutuellement) ou des régulations plus complexes.

Dans la modélisation par réseaux de jeux, chaque jeu du réseau capture les interactions locales à un groupe de gènes et fournit ainsi naturellement une description modulaire des réseaux de régulation en identifiant un jeu à un module. Cette notion de *module* est centrale non seulement dans les réseaux de régulation génétique ([SOMMA02, SSR<sup>+</sup>03, TR99]) mais également dans les réseaux métaboliques ([JTA<sup>+</sup>00, RSM<sup>+</sup>02]), et plus généralement dans les systèmes biologiques ([IBS<sup>+</sup>02, SFK<sup>+</sup>05, WA03]). Elle fait référence à une unité fonctionnelle possédant une certaine indépendance vis-à-vis des autres composants du système. Les modules constitueraient les « *briques de base* » ([MSOI<sup>+</sup>02]) composant le système et permettraient d'expliquer les fonctions biologiques complexes comme un « assemblage » de modules.

La suite du chapitre se découpe de la manière suivante. La section 5.1 présente le phénomène de régulation génétique en commençant par les mécanismes d'expression des gènes. Nous étudions ensuite la dynamique discrète des réseaux de régulation génétique.

Dans la section 5.2 nous nous intéressons au jeu de régulation. Nous présentons en particulier les méthodes d'attribution des gains pour les régulations élémentaires (un gène influençant un autre gène) avant d'en venir aux circuits élémentaires (deux gènes s'influencent l'un l'autre) et à un réseau de circuits.

Les sections 5.3 et 5.4 s'intéressent à des modélisations de réseaux de jeux réels. La section 5.3 présente un cas de régulation lors de la division cellulaire par les gènes *p53*, *p21* et *cdk2*. La section 5.4 s'intéresse à la croissance des fleurs d'*Arabidopsis thaliana*, organisme modèle dans l'étude des végétaux.

Enfin, la section 5.5 dresse un bilan de ce chapitre.

## 5.1 Régulation génétique

L'information génétique confère aux cellules la capacité de maintenir un haut degré d'organisation dans un univers désordonné. Le dogme central de la biologie explique le mécanisme par lequel l'information brute, codée dans les gènes de l'acide désoxyribonucléique ou ADN, s'exprime sous forme de protéines, qui pourront interagir avec l'organisme. Ces protéines peuvent en particulier influencer le mécanisme même de l'expression de l'information, soit en le facilitant soit en l'inhibant.

### 5.1.1 Mécanismes d'expression : des gènes aux protéines

#### ADN et gènes

L'ADN est une longue molécule en forme de double hélice constituée de quatre sous-unités appelées *nucléotides* : l'adénine (A), la cytosine (C), la guanine (G) et la thymine (T). Les nucléotides se trouvent à l'intérieur de la double hélice, et s'apparient deux à deux pour former des *paires de bases complémentaires* (ou paires de bases de Watson-Crick), entre A et T d'une part, entre C et G d'autre part.

L'information génétique est portée par certaines parties spécifiques de l'ADN, les *gènes*. Le transfert de l'information depuis l'ADN vers les protéines s'effectue au travers de deux mécanismes distincts : la *transcription* et la *traduction*. Dans le cas des cellules eucaryotes<sup>1</sup>, au contraire des cellules procaryote<sup>2</sup>, un mécanisme intermédiaire d'épissage transforme l'ARN en ARN messager qui peut sortir du noyau de la cellule pour aller dans le cytoplasme.

## Transcription

La synthèse des protéines implique un phénomène dit de *transcription* qui copie une partie des gènes de l'ADN en une molécule d'un type chimiquement et fonctionnellement différent : l'acide ribonucléique ou ARN. L'ARN, au contraire de l'ADN, est constitué d'un unique brin composé des mêmes nucléotides à la différence près que la thymine (T) présente dans l'ADN se voit remplacer par l'uracile (U) dans l'ARN.

La synthèse de l'ARN est réalisée par des enzymes, les *ARN polymérases*. Ces ARN polymérases rencontrent aléatoirement les brins d'ADN auxquels ils n'adhèrent que faiblement. Cependant, ils se lient très étroitement lorsqu'ils rencontrent une séquence spécifique de l'ADN, le *promoteur*, qui contient le site d'initiation de la synthèse de l'ARN et indique où celle-ci doit commencer. Après s'être lié au promoteur, l'ARN polymérase ouvre une courte région de la double hélice exposant ainsi les nucléotides. Une des deux chaînes sert alors de matrice pour la formation de la molécule d'ARN par addition séquentielle de nucléotides. Le nucléotide qui doit être ajouté à chaque étape est sélectionné pour former avec le nucléotide de la matrice une paire de bases complémentaires. L'ARN ainsi formé est donc complémentaire de la chaîne matricielle de l'ADN et porte la même information génétique.

Dans le cas des cellules eucaryotes, la transcription intervient dans le noyau et est suivi d'un épissage qui supprime les régions non codantes de l'ARN, pour former de l'ARN messager ou ARNm. Dans le cas des cellules procaryotes, l'ADN est directement transcrit en ARNm.

Ce mécanisme permet de garder intacte l'information « originale » de l'ADN, et de travailler sur une copie, l'ARNm, pour le mécanisme de traduction. De plus, les molécules d'ARN sont relativement courtes (mais suffisamment longues pour fabriquer quelques protéines) par rapport à l'ADN, puisque seule une partie des gènes est transcrite.

## Traduction

La traduction d'une séquence génétique en séquence protéinique s'effectue suivant un ensemble de règles déchiffrées au début des années soixantes et qui constitue le *code génétique*. Le code génétique fait correspondre l'alphabet constituant l'ARNm (les nucléotides A, C, G et U) à l'alphabet constituant les protéines qui se compose de vingt acides aminés. La combinaison de trois nucléotides successifs est appelé *codon*, et correspond à un acide aminé suivant le code génétique présenté dans le tableau 5.1. L'ARNm étant constitué de quatre nucléotides, il existe 64 codons possibles, certains acides aminés sont donc déterminés par plusieurs codons. Le code génétique a été préservé au cours de l'évolution : avec quelques exceptions mineures, il est le même dans des organismes aussi variés que les bactéries, les végétaux ou les êtres humains.

Le mécanisme de reconnaissance du codon qui transfère l'information génétique de l'ARNm à la protéine, repose sur des interactions entre paires de bases semblables à celles qui interviennent lors du transfert d'information entre ADN et ARN. Le système mis en œuvre est cependant nettement plus compliqué et utilise un *ribosome*, complexe moléculaire de plus de cinquante protéines différentes associées à plusieurs molécules d'ARN. Le ribosome trouve tout d'abord un

---

<sup>1</sup>Les cellules à noyau.

<sup>2</sup>Les cellules sans noyau.

Position 1	Position 2				Position 3
	U	C	A	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
U	Leu	Ser	STOP	STOP	A
U	Leu	Ser	STOP	Trp	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
C	Leu	Pro	His	Arg	C
C	Leu	Pro	Gln	Arg	A
C	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
A	Ile	Thr	Asn	Ser	C
A	Ile	Thr	Lys	Arg	A
A	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
G	Val	Ala	Asp	Gly	C
G	Val	Ala	Glu	Gly	A
G	Val	Ala	Glu	Gly	G

Lors de la traduction, des groupes de trois nucléotides (codons) d'une molécule d'ARNm sont traduites en acides aminés. Par exemple, le codon GUG est traduit en valine (Val), le codon CGU en arginine (Arg).

TAB. 5.1 – Code génétique

site spécifique sur l'ARNm pour débiter sa phase de lecture. Au fur et à mesure qu'il se déplace le long de la molécule, le ribosome traduit la séquence nucléotidique en séquence d'acides aminés, codon par codon. Quand le ribosome arrive au bout du message caractérisé par le codon STOP (UAA, UAG ou UGA), il se détache. La séquence linéaire d'acides aminés se replie alors pour former concrètement la protéine.

La figure 5.1 résume les mécanismes de transfert d'information depuis l'ADN et les gènes jusqu'à la protéine.

### 5.1.2 Notions de régulation

La différenciation cellulaire, autrement dit l'obtention de cellules différentes après divisions successives de cellules de départ identiques, dépend en grande partie de la modification de l'*expression des gènes*<sup>3</sup>. La *régulation* de l'expression des gènes peut s'appliquer à chaque étape menant de l'ADN à la protéine. Une cellule peut notamment contrôler les protéines qu'elle synthétise :

- en contrôlant quand et à quelle fréquence un gène est transcrit,
- en sélectionnant dans le noyau les ARNm devant être conduits dans le cytoplasme,
- en sélectionnant dans le cytoplasme les ARNm devant être traduits

Pour la plupart des gènes, les processus de contrôle prépondérants se situent lors de la transcription. Les cellules eucaryotes contiennent une grande gamme de protéines qui se fixent à l'ADN

<sup>3</sup>Un gène s'exprime lorsqu'il est transcrit puis traduit en protéine.

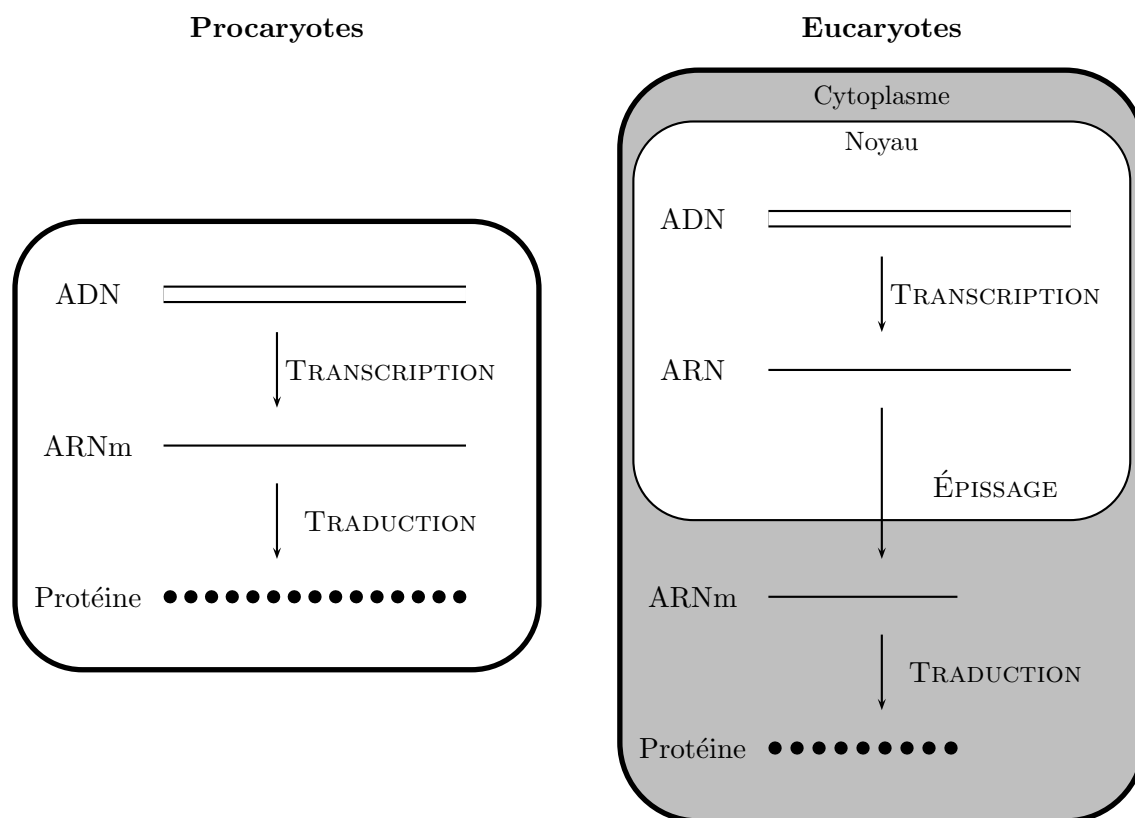


FIG. 5.1 – Le transfert d’information de l’ADN à la protéine

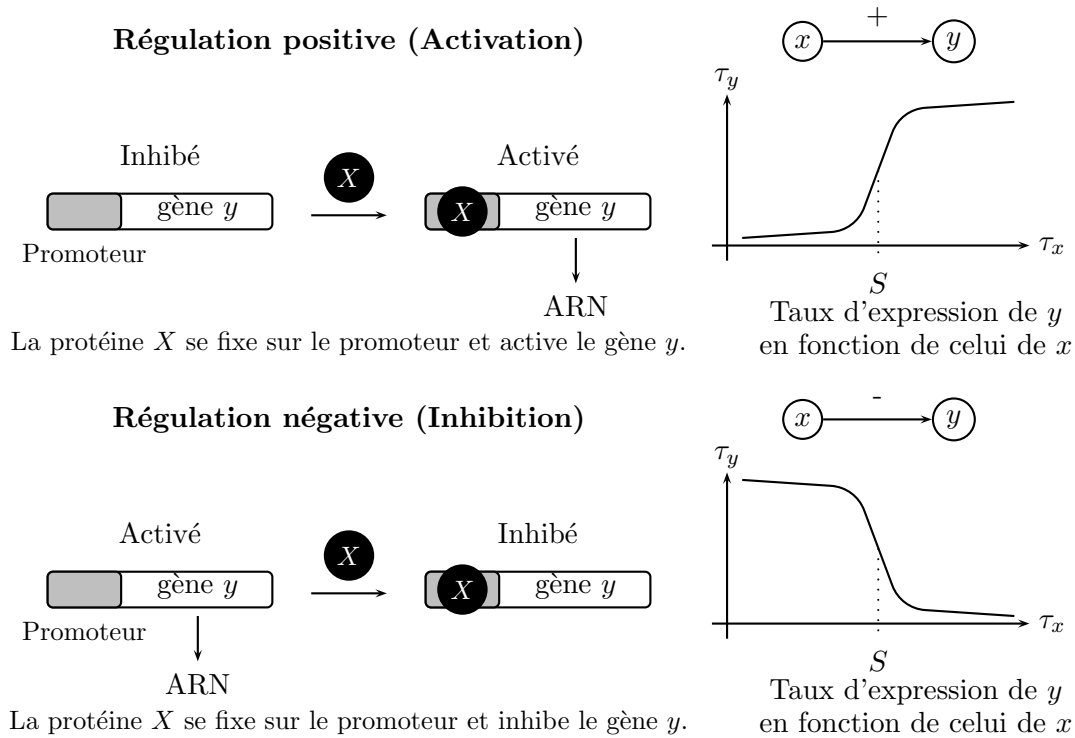


FIG. 5.2 – Influence de l’activation et de l’inhibition sur l’expression d’un gène

au niveau des séquences spécifiques (le site promoteur par exemple) dont la fonction principale est d’activer ou d’inhiber les gènes. Chacune de ces *protéines régulatrices de gènes* n’est présente qu’en un nombre relativement faible de copies par cellule et reconnaît une séquence d’ADN particulière dont la longueur est habituellement de dix à quinze nucléotides. La fixation de ces protéines peut soit faciliter (régulation positive, ou activation) soit réprimer (régulation négative, ou inhibition) la transcription d’un gène.

En particulier, les protéines produites par les mécanismes de transcription et traduction d’un gène donné peuvent à leur tour activer ou inhiber la transcription d’autres gènes. Pour simplifier, on dira qu’un gène active ou inhibe un autre gène. La figure 5.2 présente l’évolution de l’expression d’un gène  $y$  en fonction de l’expression d’un gène  $x$  l’influçant. Cette influence passe par l’intermédiaire de la protéine  $X$ , traduite à partir de  $x$ . Les courbes à droite montrent en particulier que l’influence d’un gène sur un autre est sigmoïdale. Si le taux d’expression du gène  $x$  est inférieur au seuil  $S$  de la sigmoïde, il n’aura pas, ou très peu, d’influence. Au contraire, dès que l’expression du gène dépasse ce seuil, l’influence est effective.

**Réseau de régulation génétique.** Le phénomène de régulation génétique est habituellement représenté sous la forme d’un graphe orienté et étiqueté appelée *réseau de régulation génétique*. Les sommets du graphe correspondent alors aux différents gènes ou protéines produites à partir de gènes ; un arc d’un gène  $x$  vers un gène  $y$  sera étiqueté « + » pour indiquer que  $x$  active la transcription de  $y$ , ou « - » pour indiquer que  $x$  inhibe  $y$ .

### 5.1.3 Dynamique des réseaux de régulation génétique

L’étude des réseaux de régulation s’intéresse en particulier à l’évolution temporelle de l’expression des gènes. Il s’agit en fait de considérer un réseau de régulation dans un état de départ

*i.e.* de définir les taux d'expression de chacun des gènes du réseau, et d'étudier l'évolution de ces taux au cours du temps.

### Discrétisation

L'influence d'un gène sur un autre étant de nature sigmoïdale, les différents modèles — tels ceux de René Thomas ([Tho91, TTK95]) et ses généralisations ([BCC<sup>+</sup>03, PC03]) — s'attachent en général à simplifier l'analyse du taux d'expression, qui est une donnée continue, en le discrétisant, chaque « niveau » correspondant à un palier de la sigmoïde. À un niveau d'expression spécifique d'un gène correspond la capacité de ce gène à influencer (*i.e.* activer ou inhiber) ses gènes cibles. La capacité de régulation d'un gène à un niveau donné n'est pas nécessairement maintenue à un autre niveau.

Supposons par exemple qu'un gène  $y$  puisse à la fois activer un gène  $z$  et inhiber un gène  $x$ . L'influence de  $y$  sur  $z$  et  $x$  dépend directement du taux d'expression de  $y$ . La figure 5.3 présente ainsi le taux d'expression de  $x$  et  $z$  en fonction du taux d'expression de  $y$ , on notera en particulier les valeurs des seuils sigmoïdes  $S_x$  et  $S_z$ . La même figure montre également la superposition de ces deux courbes. Trois comportements possibles existent pour le gène  $y$  :

- si le taux d'expression de  $y$  est faible, *i.e.*  $\tau_y < S_x$ ,  $y$  active  $x$  et inhibe  $z$  ;
- si le taux d'expression de  $y$  est intermédiaire, *i.e.*  $S_x < \tau_y < S_z$ ,  $y$  inhibe  $x$  et  $z$  ;
- si le taux d'expression de  $y$  est élevé, *i.e.*  $S_z < \tau_y$ ,  $y$  inhibe  $x$  et active  $z$ .

Le modèle discret fait alors correspondre à chacun de ces comportements un *niveau d'expression* du gène  $y$ . Le premier niveau, noté  $0_y$  (ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté), correspond à un taux d'expression de  $y$  inférieur à  $S_x$  ; le deuxième niveau, noté  $1_y$  (ou 1), correspond à  $S_x < \tau_y < S_z$  ; le troisième niveau, noté  $2_y$  (ou 2), correspond à un taux d'expression de  $y$  supérieur à  $S_z$ .

### Grphe d'états

La dynamique de régulation se modélise habituellement par un *graphe d'états* où chaque sommet incarne un état du système, *i.e.* l'attribution d'un niveau aux différents gènes composant le réseau de régulation. Les arcs du graphe d'états représentent quant à eux les transitions d'un état vers un autre. Ces transitions suivent les règles établies précédemment, autrement dit, si  $y$  active  $z$  et que le système se trouve dans l'état  $(1_y, 0_z)$ , il évoluera naturellement vers l'état  $(1_y, 1_z)$ .

Formellement, dans le cas d'un réseau à  $n$  gènes, chaque gène admettant deux niveaux d'expression, le graphe d'états correspond au graphe d'une relation  $\rightarrow : 2^n \rightarrow 2^n$ . L'activation et l'inhibition de  $z$  par  $y$  implique respectivement l'existence des deux transitions :

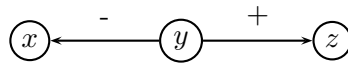
- si  $y$  active  $z$ , on observe les deux transitions suivantes
 
$$(\dots, 0_y, \dots, 1_z, \dots) \rightarrow (\dots, 0_y, \dots, 0_z, \dots)$$

$$(\dots, 1_y, \dots, 0_z, \dots) \rightarrow (\dots, 1_y, \dots, 1_z, \dots)$$
- si  $y$  inhibe  $z$ , on observe les deux transitions suivantes
 
$$(\dots, 0_y, \dots, 0_z, \dots) \rightarrow (\dots, 0_y, \dots, 1_z, \dots)$$

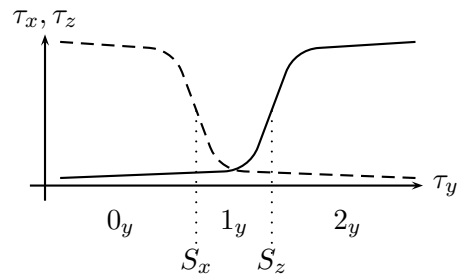
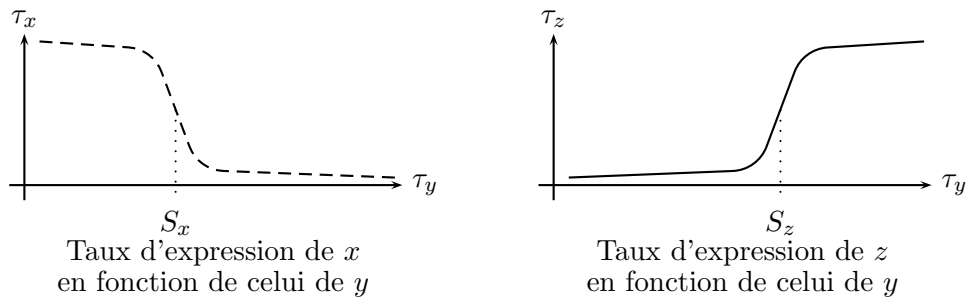
$$(\dots, 1_y, \dots, 1_z, \dots) \rightarrow (\dots, 1_y, \dots, 0_z, \dots)$$

Deux formalismes principaux existent pour décrire les situations où plusieurs transitions seraient possibles simultanément.

- Dans les *modèles synchrones* ([Kau69, Kau93]) tous les transitions possibles sont réalisées en même temps. Ainsi, dans le réseau de régulation de la figure 5.3, l'état  $(1_x, 1_y, 0_z)$



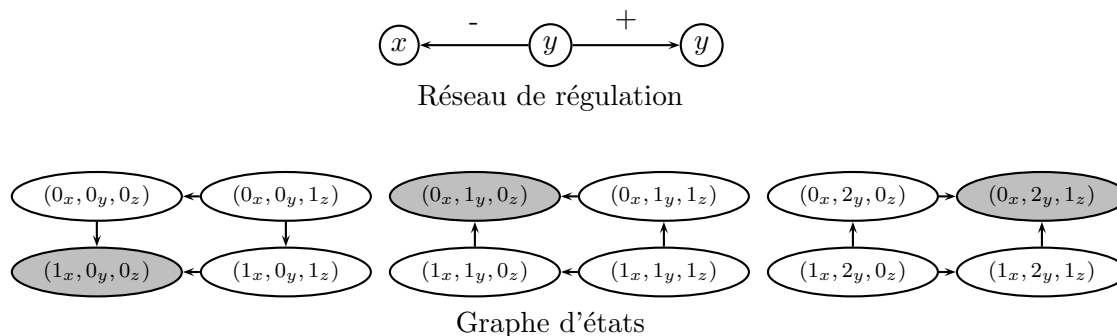
Réseau de régulation



Les niveaux d'expression de  $y$  (notés  $0_y$ ,  $1_y$  et  $2_y$ ) sont obtenus en discrétisant son taux d'expression  $\tau_y$ , et dépendent des seuils  $S_x$  et  $S_z$  des sigmoïdes. Le niveau  $0_y$  correspond à  $\tau_y < S_x$ , le niveau  $1_y$  à  $S_x < \tau_y < S_z$ , et le niveau  $2_y$  à  $S_z < \tau_y$ .

FIG. 5.3 – Niveaux d'expression d'un gène





Dans le graphe d'états, les triplets correspondent aux valeurs associées respectivement à  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Les niveaux sont notés  $0_i$ ,  $1_i$  et  $2_i$  pour le gène  $i$ . En grisé les états stables du graphe d'états.

FIG. 5.4 – Graphe d'états asynchrone du réseau de la figure 5.3

correspond à une situation où  $z$  inhibe  $x$  et active  $z$ . Les deux transitions peuvent avoir lieu simultanément, et se représentent dans le graphe d'états par  $(1_x, 1_y, 0_z) \rightarrow (0_x, 1_y, 1_z)$ .

- Dans les *modèles asynchrones* ([Tho73, BCRG04]), une seule transition à la fois est autorisée. Autrement dit, une transition entre deux états implique que ces états ne diffèrent que par le niveau d'expression d'un seul gène. Dans le cadre de l'exemple précédent, on observera donc les deux transitions séparément, ce qui se traduit dans le graphe d'états par  $(1_x, 1_y, 0_z) \rightarrow (0_x, 1_y, 0_z)$  et  $(1_x, 1_y, 0_z) \rightarrow (1_x, 1_y, 1_z)$ .

Le formalisme asynchrone considère que les vitesses de transition peuvent varier et que, étant donné un état initial admettant deux transitions possibles, l'une des deux se produira et placera le système dans un nouvel état, avant que l'autre transition n'ait effectivement lieu. Dans la suite du chapitre, nous ne considérerons plus que cette approche. Le graphe d'états asynchrone complet du réseau de régulation de la figure 5.3 est donné figure 5.4.

## Étude de la dynamique

Dans le cadre de l'analyse de la dynamique d'un réseau de régulation, un intérêt particulier est porté à la détermination d'états stables, ou de cycles limites.

- Un état stable est un état du graphe d'où aucun arc ne part. Il correspond en fait à une situation où tous les gènes influencés sont dans un état conforme à ces influences. Si on laisse le système évoluer, il reste continuellement dans le même état. Par exemple, l'état  $(0_x, 1_y, 1_z)$  de la figure 5.4 est un état stable.
- Un cycle limite est une suite finie d'états telle que chaque état de la suite ne peut évoluer que vers l'état suivant, et le dernier état ne peut évoluer que vers le premier état de la suite. Les circuits élémentaires négatifs de la figure 5.7 (page 109) présentent de tels cycles limites.

Les états stables ou les cycles limites permettent de déterminer dans quel(s) état(s) se situera le réseau de régulation. Dans le cas d'un état stable, le réseau n'évolue plus, dans le cas d'un cycle limite, le réseau continue d'évoluer, mais les états admissibles sont contraints à rester dans le cycle.

## 5.2 Le jeu de régulation

Les réseaux de jeux permettent de décrire les réseaux de régulation génétique en identifiant les interactions entre gènes à des jeux. Trois composants définissent chacun des jeux : les agents, les stratégies et les gains.

- *Les agents* incarnent les acteurs du modèle. Dans le cadre de la régulation génétique, ils correspondent naturellement aux gènes ou produits de gènes.
- *Les stratégies* incarnent des actions caractéristiques des joueurs. Plus précisément, nous entendons par action caractéristique un état capable d'influer sur le comportement des autres agents. Chaque stratégie suppose donc qu'elle a un effet différent sur au moins un des agents. De fait, les stratégies des joueurs sont identifiées aux niveaux d'expression des gènes.
- L'attribution des *gains* est fondamentale dans la modélisation des réseaux de régulation génétique, puisqu'elle contraint le calcul des équilibres de Nash, et donc des équilibres globaux qui sont assimilés aux états stables du réseau de régulation. La définition des gains modélise la dynamique des interactions en s'appuyant sur les expériences et observations.

Les règles que nous présentons ci-après s'attachent à définir une méthode d'attribution en fonction des états des différents agents. De manière informelle, *le gain d'un gène est d'autant plus élevé que son niveau d'expression est conforme aux influences qu'il subit*. Cette règle d'attribution est utilisée pour déterminer les gains des régulations élémentaires (un gène activant ou inhibant un autre gène). Ces jeux élémentaires peuvent alors être combinés pour modéliser des réseaux plus complexes.

### 5.2.1 Modélisation des régulations élémentaires

Dans le cadre des régulations élémentaires, le joueur régulateur ne régule qu'un seul gène, nous n'avons donc à considérer qu'une seule sigmoïde, un seul seuil et *deux niveaux d'expression*.

**Gains du joueur régulé.** Considérons le cas de l'activation de  $y$  par  $x$ .

- Si  $x$  est au niveau 0, le gène  $y$  est inhibé. De fait, la stratégie de  $y$  la plus conforme à l'influence de  $x$  est la stratégie  $0_y$ . Le gain de  $y$  dans la configuration  $(0_x, 0_y)$  doit donc être supérieur au gain de  $y$  pour la configuration  $(0_x, 1_y)$ .
- Dans le cas où  $x$  est au niveau 1, le gène  $y$  est activé, et donc le gain de  $y$  dans la configuration  $(1_x, 0_y)$  doit donc être inférieur au gain de  $y$  pour la configuration  $(1_x, 1_y)$ .

Des considérations similaires interviennent dans le cas de l'inhibition. Ces relations d'ordre entre les configurations suffisent à décrire le jeu entre  $x$  et  $y$ , et peuvent être considérée comme le point de vue qualitatif de la description. Quantitativement, tout gain respectant ces relations permettra de calculer les mêmes équilibres de Nash *en stratégies pures*. Nous suivons alors un règle d'attribution élémentaire qui associe un gain de 1 si la stratégie jouée est conforme aux influences subies, et de 0 sinon.

**Gains du joueur régulateur.** Le joueur régulateur n'étant soumis à aucune influence, nous lui attribuons pour chaque configuration un gain de valeur arbitraire noté  $\varepsilon$  (voir chapitre 4) ne contraignant pas les calculs d'équilibres.

La figure 5.5 présente ainsi les jeux associés à l'activation ou à l'inhibition d'un joueur  $y$  par un joueur  $x$ .

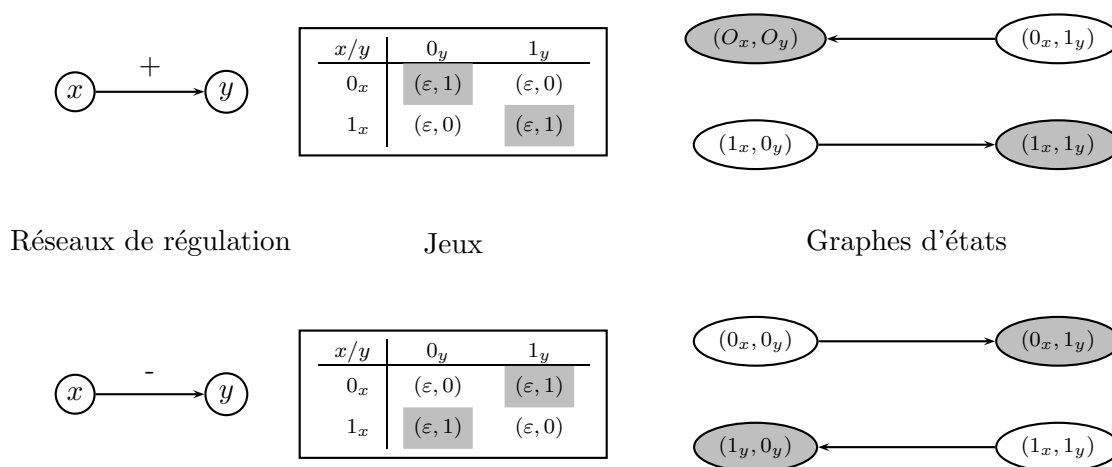


FIG. 5.5 – Régulations élémentaires, jeux et graphes d'états associés

**Équilibres.** Les équilibres de Nash des jeux sont représentés en grisé dans la table de gains. On retrouve des résultats capturant les états stables de la dynamique du réseau : dans le cas de l'activation, les deux gènes sont au même niveau (soit 0, soit 1) ; dans le cas de l'inhibition, les deux gènes sont à des niveaux différents (si  $x$  est au niveau 0,  $y$  est au niveau 1 et inversement).

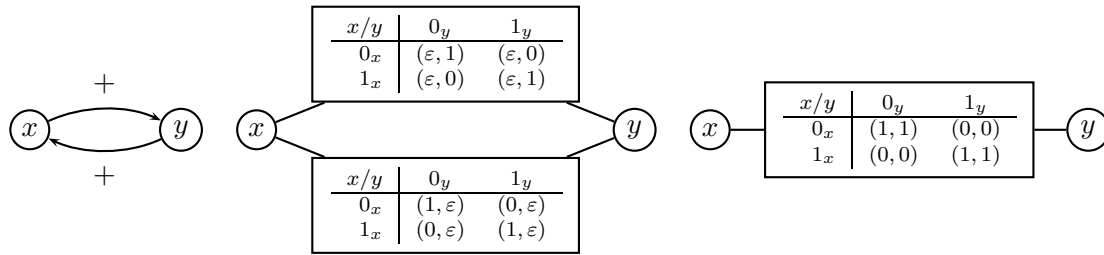
### 5.2.2 Modélisation des circuits élémentaires de régulation

Les gains associés aux régulations élémentaires étant définis, il devient possible de combiner ces régulations pour former des jeux de régulation plus complexes et en particulier des circuits de régulation.

**Circuits positifs et négatifs.** On distingue deux types de circuit de régulation : les circuits positifs et les circuits négatifs. Les premiers sont composés d'un nombre pair d'arcs de signe « - ». Les seconds sont composés d'un nombre impair de signe « - ». René Thomas ([Tho91]) considère que les circuits positifs sont impliqués dans le procédé de différenciation. Ils sont nécessaires pour qu'il y ait multi-stationarité *i.e.* l'existence de plusieurs états stables accessibles selon l'état initial. Les circuits négatifs jouent quant à eux un rôle essentiel dans l'homéostasie, c'est-à-dire dans l'existence d'un cycle limite.

**Circuits élémentaires.** Les circuits élémentaires se composent de deux gènes  $x$  et  $y$ , et deux arcs modélisant les influences de  $x$  sur  $y$  et de  $y$  sur  $x$ . Ces circuits sont considérés comme des paradigmes de régulation impliqués dans la différenciation et l'homéostasie. La figure 5.7 présente les quatre circuits élémentaires possibles — suivant que  $x$  active ou inhibe  $y$  et que  $y$  active ou inhibe  $x$  — et leurs graphes d'états associés. Les circuits 1 et 2 sont des circuits positifs tandis que les circuits 3 et 4 sont des circuits négatifs.

**Gains.** Les fonctions de gains sont définies en utilisant les règles des régulations élémentaires. À chaque arc du réseau peut être associé un jeu. Ce jeu définit les gains d'un joueur (le joueur régulé) alors que les gains de l'autre joueur sont tous égaux à  $\epsilon$ . De fait, dans le cas des circuits



Réseau de régulation

Réseau de jeux

Réseau de jeux simplifié

À partir du réseau de régulation, on crée un jeu par arc (en suivant les règles de régulation élémentaires) pour obtenir le réseau de jeu. Celui-ci peut être simplifié en joignant les deux jeux créés.

FIG. 5.6 – Construction du jeu d'activation mutuelle

élémentaires, il est possible de simplifier la représentation en joignant les deux jeux en un seul en suivant la règle de la jointure avec élément neutre (voir le chapitre 4) comme le montre la figure 5.6 dans le cas d'une activation mutuelle. La figure 5.7 résume ces considérations et présente les quatre circuits élémentaires, leur représentation sous forme de jeu et le graphe d'états associés.

**Équilibres.** L'observation des résultats de la régulation au sein de ces circuits montre que les équilibres de Nash, en stratégies pures, sont des états stables qui correspondent à des états multi-stationnaires tandis que l'absence d'équilibres purs de Nash peut être représentative de la présence des boucles de rétroaction qui mène à l'homéostasie dans un système fermé.

Plus précisément, pour le cas (1) nous avons deux états possibles qui sont  $(0_x, 0_y)$  et  $(1_x, 1_y)$ . Le premier correspond à l'absence de production des protéines  $x$  et  $y$ . Ceci mène à un état d'équilibre où aucun gène n'est exprimé. Le deuxième état d'équilibre correspond à l'expression des deux gènes, et à la présence des deux protéines. Les cas (3) et (4) correspondent à des circuits négatifs, et n'admettent pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. Néanmoins, les quatre configurations de chaque jeu constitue un cycle limite.

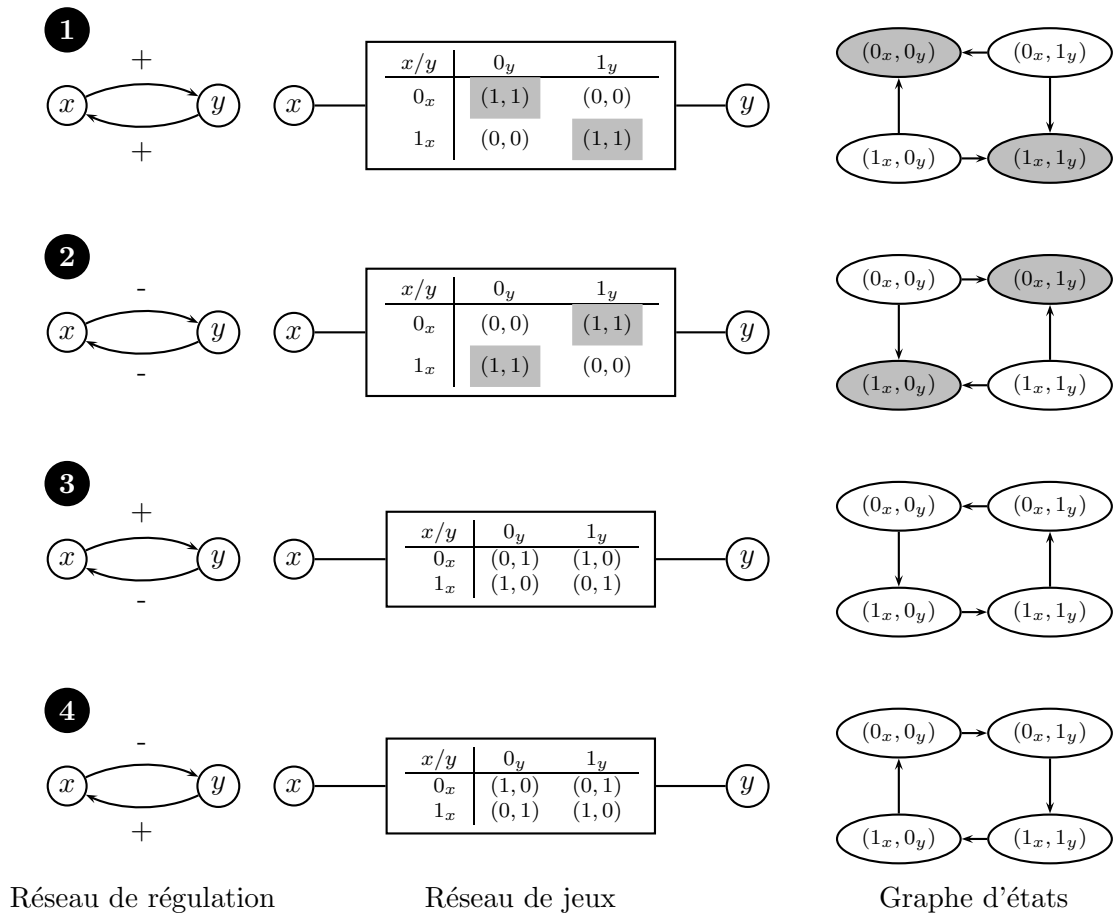
### 5.2.3 Un petit réseau de circuits élémentaires

Nous présentons ici la modélisation d'un réseau de régulation mettant en jeu plusieurs circuits élémentaires. Ce réseau est représenté sur la figure 5.8 (page 111) : le gène  $y$  participe à la fois à une inhibition mutuelle avec  $x$ , et à une activation mutuelle avec  $z$ . Le réseau de jeux associé à ce réseau de régulation est alors constitué de deux jeux modélisant d'une part l'inhibition mutuelle entre  $x$  et  $y$ , et d'autre part l'activation mutuelle entre  $y$  et  $z$ .

**Stratégies.** Les joueurs  $x$  et  $z$  n'influencent qu'un seul joueur (le joueur  $y$ ), on leur attribue donc chacun deux stratégies, notées 0 et 1 et correspondant à leurs niveaux d'expression possibles.

Le joueur  $y$  influençant deux joueurs, lui sont attribuées trois stratégies  $0_y$ ,  $1_y$  et  $2_y$  correspondant aux trois niveaux d'expression. Le niveau 0 correspond à une situation où le gène  $y$  ne s'exprime pas, et le niveau 2 à une situation où le gène s'exprime totalement, c'est-à-dire qu'il inhibe  $x$  et active  $z$ .

Une question se pose alors pour déterminer la correspondance du niveau 1 intermédiaire : quels sont les seuils d'activation et d'inhibition de  $y$ ? Nous avons détaillé, sur la figure 5.3, le



En grisé, dans les tables de gains, les équilibres de Nash. En grisé, dans les graphes d'états, les états stables.

FIG. 5.7 – Circuits élémentaires, jeux et graphes d'états

*cas où l'inhibition s'exprime avant l'activation*, autrement dit dans le cas où  $S_x < S_z$ . Dans ce cas, le niveau 1 correspond à une situation où  $y$  inhibe  $x$  et  $z$ . Dans le cas où  $S_x > S_z$ , on se trouve dans une situation opposée pour la stratégie  $1_y$  :  $y$  active  $x$  et  $z$ .

**Gains.** Que l'on considère la situation  $S_x < S_z$  ou  $S_z > S_x$ , l'attribution des gains peut se résumer par les deux tables suivantes, où  $\tau_y$  indique le taux d'expression de  $y$  :

$x/y$	$\tau_y < S_x$	$\tau_y > S_x$
$0_x$	(0, 0)	(1, 1)
$1_x$	(1, 1)	(0, 0)

$z/y$	$\tau_y < S_z$	$\tau_y > S_z$
$0_z$	(1, 1)	(0, 0)
$1_z$	(0, 0)	(1, 1)

La relation d'ordre entre les niveaux et les seuils permet de déterminer les gains à attribuer. Supposons par exemple que  $S_x < S_z$ , alors

- $\tau_y < S_x$  correspond au niveau 0,  $\tau_y > S_x$  correspond aux niveaux 1 et 2; et la table de gains pour le jeu de double inhibition est

$x/y$	$0_y$	$1_y$	$2_y$
$0_x$	(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)
$1_x$	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)

- $\tau_y < S_z$  correspond aux niveaux 0 et 1,  $\tau_y > S_z$  correspond au niveau 2; et la table de gains pour le jeu de double activation est

$z/y$	$0_y$	$1_y$	$2_y$
$0_z$	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)
$1_z$	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)

La figure 5.8 prend en compte ces différentes considérations et fournit les réseaux de jeux correspondants.

Il est intéressant de noter que le calcul des équilibres globaux fournit trois possibilités. Deux de ces possibilités sont identiques pour  $S_x < S_z$  et  $S_x > S_z$ . Le troisième équilibre diffère suivant le réseau de jeux considéré :

- dans le cas  $S_x < S_z$ , la configuration  $(0_x, 1_y, 0_z)$  est un équilibre global, et correspond à la situation où  $y$  inhibe à la fois  $x$  et  $z$ ,
- dans le cas  $S_x > S_z$ , la configuration  $(1_x, 1_y, 1_z)$  est un équilibre global, et correspond à la situation où  $y$  active à la fois  $x$  et  $z$

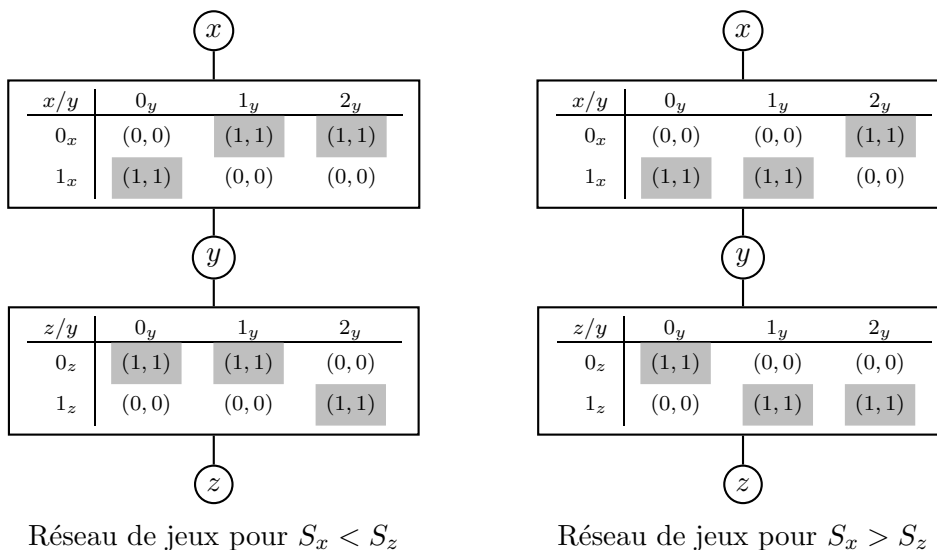
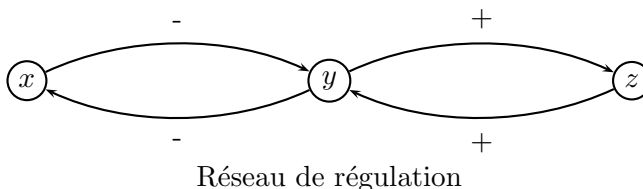
Ces deux équilibres modélisent des situations permettant éventuellement de déterminer quel est l'ordre des seuils  $S_x$  et  $S_z$ . En effet, seule l'une des deux modélisations ( $S_x < S_z$ ) permet d'observer un état stable avec les gènes  $x$  et  $z$  au niveau 1. Si un tel état est observé, il est alors possible d'en déduire que  $S_x < S_z$  est correct au contraire du modèle  $S_x > S_z$ .

### 5.3 Régulation de la division cellulaire

Dans cette section nous modélisons un réseau impliqué dans la régulation de la division cellulaire et faisant intervenir trois gènes :  $p53$ ,  $p21$  et  $cdk2$ .

#### 5.3.1 Le modèle biologique

La reproduction cellulaire implique que les cellules dupliquent leur contenu avant de se diviser en deux; ce phénomène est appelé *division cellulaire*. Les organismes pluricellulaires se forment à la suite de séquences complexes de divisions cellulaires et parallèlement de structurations d'ensembles pluricellulaires (tissus), eux-mêmes structurés en organes, eux-mêmes structurés



$$\left. \begin{array}{l} (1_x, 0_y, 0_z) \\ (0_x, 1_y, 0_z) \\ (0_x, 2_y, 1_z) \end{array} \right\} \text{Trois équilibres globaux} \left\{ \begin{array}{l} (1_x, 0_y, 0_z) \\ (1_x, 1_y, 1_z) \\ (0_x, 2_y, 1_z) \end{array} \right.$$

Deux modélisations dépendant des seuils d'activation et d'inhibition de  $y$ . Dans chaque cas, trois équilibres sont trouvés dont deux identiques. exactement dans le cadre booléen.

FIG. 5.8 – Un réseau de régulation à deux circuits élémentaires

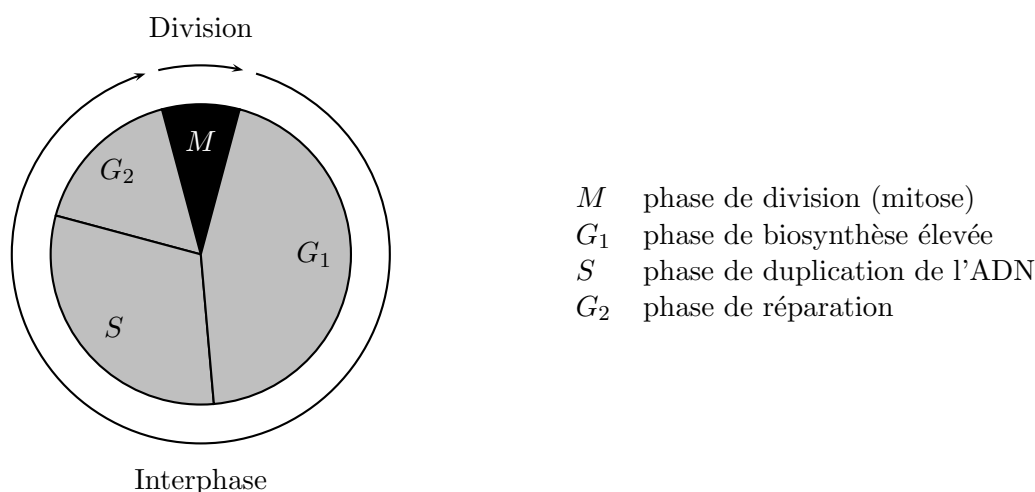


FIG. 5.9 – Cycle cellulaire

en organisme. Même lorsque un animal ou végétal est arrivé à maturité, la division cellulaire continue à se produire et constitue un moyen de compenser les pertes de substance liées à la dégradation et aux agressions subies. Ainsi un être humain adulte doit fabriquer des millions de nouvelles cellules par seconde, simplement pour maintenir le *statu quo* entre la « naissance » et la « mort » de ses cellules.

La duplication de la plupart des composants cellulaires ne nécessite pas un contrôle très strict. Il existe cependant une exception notable pour l'ADN, support de l'information génétique, qui doit toujours être parfaitement dupliqué puis divisé entre les deux cellules filles. Pour ce faire, des mécanismes de contrôle existent en amont de la phase de division cellulaire. En effet, la phase de division cellulaire ou phase  $M$  (pour mitose) n'occupe qu'un brève période du cycle de reproduction cellulaire (environ dix pour cent). L'intervalle entre deux phases  $M$  est appelé *interphase*, et constitue une période durant laquelle des travaux préparatoires élaborés s'effectuent pour la division selon une séquence soigneusement ordonnée. La cellule passe la majeure partie de sa vie en interphase. Ainsi, pour les cellules à division cellulaire rapide, l'interphase dure généralement entre 16 et 24 heures alors que la mitose ne prend qu'une à deux heures ([ABL<sup>+</sup>83]).

La figure 5.9 résume les différentes phases du cycle cellulaire, et fait apparaître les trois phases successives ( $G_1$ ,  $S$  et  $G_2$ ) composant l'interphase ([Bas01]) :

- pendant la phase  $G_1$ , les activités de biosynthèse de la cellule (qui se poursuivent lentement pendant la phase  $M$ ) recommencent à une vitesse élevée,
- la phase  $S$  commence au moment de la synthèse de l'ADN et se termine lorsque le contenu du noyau en ADN a doublé,
- la phase  $G_2$  intervient après la phase  $S$  et se poursuit jusqu'à la phase  $M$ , des mécanismes de réparation permettent corriger les erreurs produites pendant la synthèse de l'ADN.

Plusieurs mécanismes contrôlent le cycle cellulaire et permettent de conserver l'intégrité de l'information génétique ([ABL<sup>+</sup>83, Bas01]). Ces mécanismes reposent essentiellement sur deux structures protéiniques complémentaires appelées cycline-dependent-kinase ( $Cdk$ ) et cycline.  $Cdk$  et cycline s'associent et forment des complexes jouant un rôle important dans les processus de mitose. En particulier, certains gènes définis en tant que « *suppresseurs de tumeur* », peuvent arrêter le cycle cellulaire à des points de contrôle critiques afin de réparer les



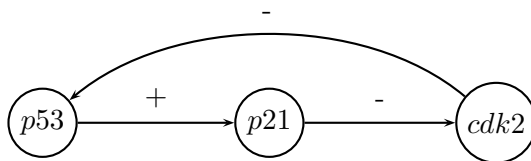
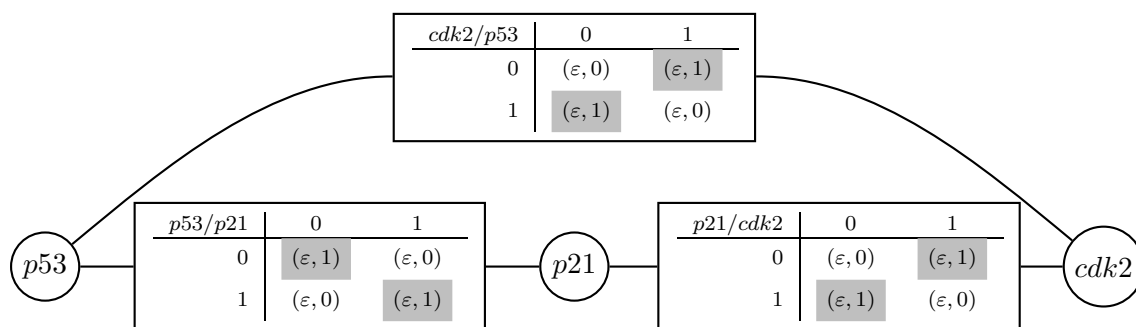


FIG. 5.10 – Le réseau de régulation entre  $p53$ ,  $p21$  et  $cdk2$



| En grisé, les équilibres de Nash de chacun des jeux.

FIG. 5.11 – Réseau de jeux modélisant le réseau de régulation entre  $p53$ ,  $p21$  et  $cdk2$

dommages subis par l’ADN ou d’induire la mort des cellules.

Le passage de la phase  $G_1$  à la phase  $S$  est ainsi régulé par le gène  $p53$ . Dans le cas où l’ADN génomique se trouve endommagé, d’une manière ou d’une autre, le gène  $p53$  est activé et la cellule se trouve bloquée dans la phase  $G_1$  du cycle cellulaire. La cellule ne peut alors plus se diviser, et la formation d’une tumeur est évitée. Le gène  $p53$  a également pour effets d’activer la réparation de l’ADN et, si les dégâts sont trop importants, de déclencher la mort programmée, ou apoptose, de la cellule. Le gène  $p53$  inhibe la transition de  $G_1$  à  $S$  en stimulant l’expression du gène  $p21$ , qui participe à cette régulation en inhibant l’expression des protéines kinases comme la cyclin-dépendent-kinase 2 ( $cdk2$ ) ([WPSY04]). La protéine  $cdk2$  peut également s’associer à la cycline pour inhiber la transcription de  $p53$ . Le réseau de régulation entre  $p53$ ,  $p21$  et  $cdk2$  est représenté figure 5.10.

### 5.3.2 Modélisation par les réseaux de jeux

**Réseau de jeux.** Chaque gène du réseau de la figure 5.10 n’influence qu’un seul autre gène, deux stratégies leur sont donc associées. Le réseau de jeux obtenu en utilisant les règles de régulations élémentaires est présenté figure 5.11. Il se compose de trois jeux entre chacun des joueurs  $p53$ ,  $p21$  et  $cdk2$ .

**Jeu.** La représentation par réseau de jeu permet de capturer la localité des interactions du réseau de régulation, en décrivant spécifiquement chaque interaction. Néanmoins, dans chaque jeu, un des joueurs voit son gain égal à  $\epsilon$ . Il est alors possible de joindre les trois jeux du réseaux en suivant la règle appliquée pour les circuits élémentaires. La table de gains correspondant au

jeu obtenu est alors la suivante.

Stratégies			Gains		
<i>p53</i>	<i>p21</i>	<i>cdk2</i>	<i>p53</i>	<i>p21</i>	<i>cdk2</i>
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

**Équilibres.** Que l'on considère le jeu joint ou le réseau de jeux, les mêmes équilibres sont identifiés :

- $(0_{p53}, 0_{p21}, 1_{cdk2})$  correspond à une situation où *p53* et *p21* ne s'expriment pas, *cdk2* s'exprime alors, et la cellule peut se diviser ;
- $(1_{p53}, 1_{p21}, 0_{cdk2})$  correspond à une situation où *p53* et *p21* sont activés, ils inhibent ainsi *cdk2*, empêchant alors la transition  $G_1/S$ .

## 5.4 *Arabidopsis thaliana*

Dans cette section nous nous intéressons à un réseau génétique impliqué dans la croissance des fleurs d'*Arabidopsis thaliana* ([MAB98, MAB00]). Ce réseau constitué de quinze gènes a été modélisé par un réseau de jeux, à l'aide du logiciel GNET-PAD présenté dans le chapitre 6 (figure 6.5, page 128).

### 5.4.1 Le modèle biologique

#### Un organisme modèle

L'arabette des dames, ou *Arabidopsis thaliana*, est une petite plante membre de la famille des moutardes qui présente plusieurs avantages majeurs en tant qu'« organisme modèle » pour la recherche génétique dans le monde végétal :

- la petite taille d'*A. thaliana* permet de la cultiver en grande quantité dans des tubes à essais, mais également sur le terrain (environ un millier de plants par mètre carré) ;
- son cycle de développement est court (le cycle graine/plante/graine ne dure que deux mois) ;
- un plant produit environ 40000 graines ;
- le génome d'*A. thaliana* est de l'ordre 157 millions de paires de bases ([BLPJ03]) réparties sur cinq chromosomes et 25500 gènes ce qui en fait un des plus petits génomes connus dans le monde végétal, et le premier à avoir été séquencé en 2000 ;
- enfin, l'absence d'intérêts économiques sur cette espèce facilite la diffusion des informations entre laboratoires.

## Développement floral

On trouve dans la grande majorité des angiospermes<sup>4</sup> un plan de développement floral identique. Tous présentent quatre types d'organes (sépales, pétales, étamines et carpelles) qui de plus apparaissent suivant un schéma spatio-temporel typique : les sépales apparaissent tout d'abord à l'extérieur de la fleur, puis les pétales et les étamines, en enfin les carpelles au centre de la fleur ([Rud92]). Les études au niveau moléculaire suggèrent également la conservation des gènes, et de la plupart de leurs interactions, impliqués dans le développement floral des angiospermes ([FIA04]).

Des études expérimentales sur *A. thaliana* et *Antirrhinum majus* ont mené au modèle ABC d'expression des gènes pour prédire l'identité d'un organe floral primordial ([CM91]) :

- les gènes de la classe A spécifient le destin des sépales à l'extérieur de la spirale florale,
- les gènes des classes A et B déterminent le développement des pétales dans la seconde spirale
- les gènes des classes B et C déterminent les étamines dans la troisième spirale,
- enfin, les gènes de la classe C seuls influencent les carpelles dans la spirale centrale (la quatrième).

Cependant, le modèle ABC ne fournit pas d'explication dynamique sur la manière dont les états d'équilibres sont atteints et maintenus au travers des interactions entre les gènes ABC et non ABC.

Carlos Espinosa-Soto *et al.*, dans [ESPLAB04], intègrent des données sur les gènes ABC et non ABC et proposent un modèle de réseau dynamique pour *A. thaliana*. Notre modèle de réseau de jeux met en valeur les états stables de ce réseau dynamique.

### 5.4.2 Modélisation par les réseaux de jeux

#### Données

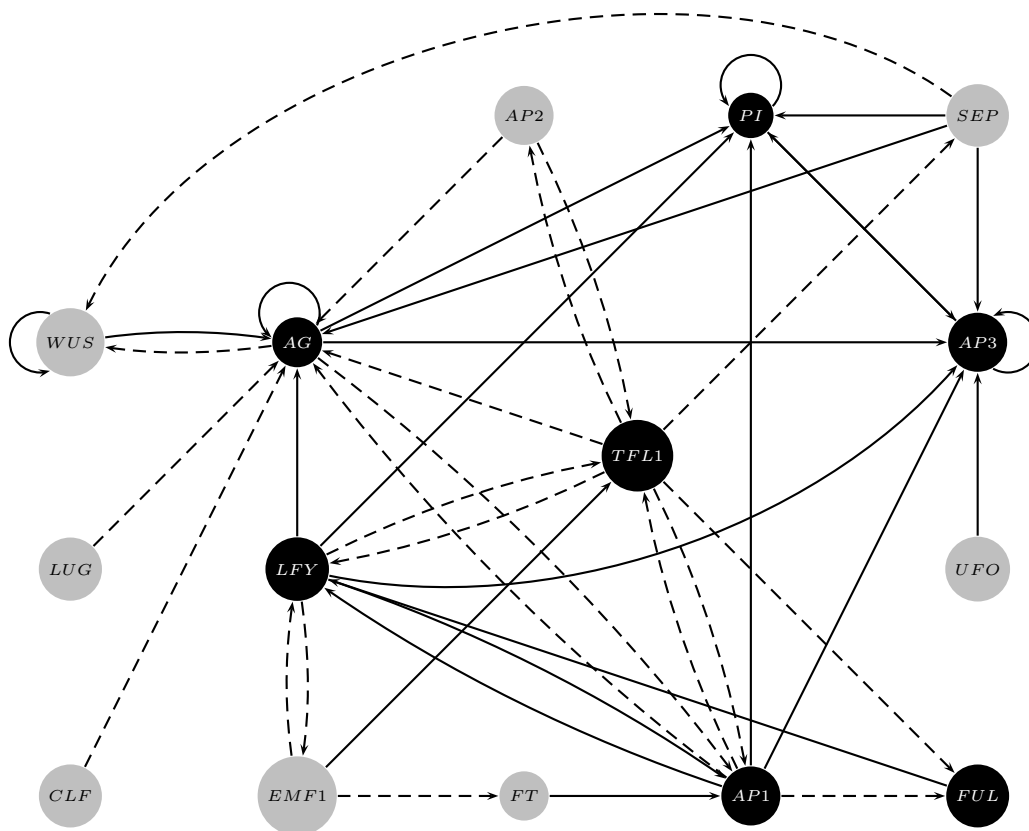
Notre modélisation se fonde sur des données expérimentales pour proposer un réseau de régulation génétique, dont les états stables correspondent au développement des quatre organes floraux (sépales, pétales, étamines et carpelles). Deux types de données sont disponibles dans [ESPLAB04], d'une part le réseau de régulation à proprement parler, et d'autre part des « tables d'évolution ».

**Réseau de régulation.** La figure 5.12 présente le réseau de régulation proposé par Espinosa-Soto *et al.*. Ce réseau se compose de quinze gènes, huit d'entre eux admettent deux niveaux d'expression et les sept autres trois niveaux, pour un total de 559872 états possibles. Pour ne pas surcharger la figure, un gène *A* activant un gène *B* est représenté par une flèche de *A* vers *B* *en trait plein*, alors qu'une inhibition est représentée par *un trait pointillé*.

**Tables d'évolution.** Ces tables décrivent l'évolution d'un gène en fonction de l'état de ses prédécesseurs dans le graphe de régulation. Considérons par exemple le cas du gène SEP qui est inhibé, d'après la figure 5.12, par le gène TFL1 et dont la table d'évolution est la suivante :

TFL1	SEP
0	1
1, 2	0

<sup>4</sup>Les plantes à fleurs, et donc les végétaux qui portent des fruits.



En traits pleins les arcs d'activation. En pointillés les arcs d'inhibition.  
 En noir les agents à trois niveaux d'expression, en gris ceux à deux niveaux.

FIG. 5.12 – Réseau de régulation d'*Arabidopsis thaliana*

Cette table décrit l'état vers lequel tend le gène SEP (colonne de droite) en fonction de l'état de son prédécesseur TFL1 (colonne de gauche). La table d'évolution représente une inhibition puisque la présence de TFL1 (niveau 1 et 2) entraîne une absence de SEP (niveau 0)

Le cas des gènes régulés par plusieurs prédécesseurs est plus complexe car le gène considéré peut être activé par certains prédécesseurs et inhibé par d'autres. Considérons par exemple la régulation de WUS qui s'auto-active, et est inhibé par AG et SEP. La table d'évolution correspondante est la suivante :

WUS	AG	SEP	WUS
0	0, 1, 2	0, 1	0
1	2	1	0
1	2	0	1
1	0, 1	0, 1	1

Cette table implique plusieurs considérations :

- quelque soit l'état de AG ou SEP, si WUS est au niveau 0, il y restera (première ligne) ;
- si WUS s'autoactive, l'inhibition de AG et SEP n'est pas toujours suffisante pour inhiber globalement WUS :
  - WUS est globalement inhibé si AG est au niveau 2 et SEP au niveau 1 (deuxième ligne),
  - WUS reste activé sinon (troisième et quatrième lignes)

L'ensemble des tables d'évolution proposées proviennent de données expérimentales discrétisées, elles sont disponibles dans l'annexe C.

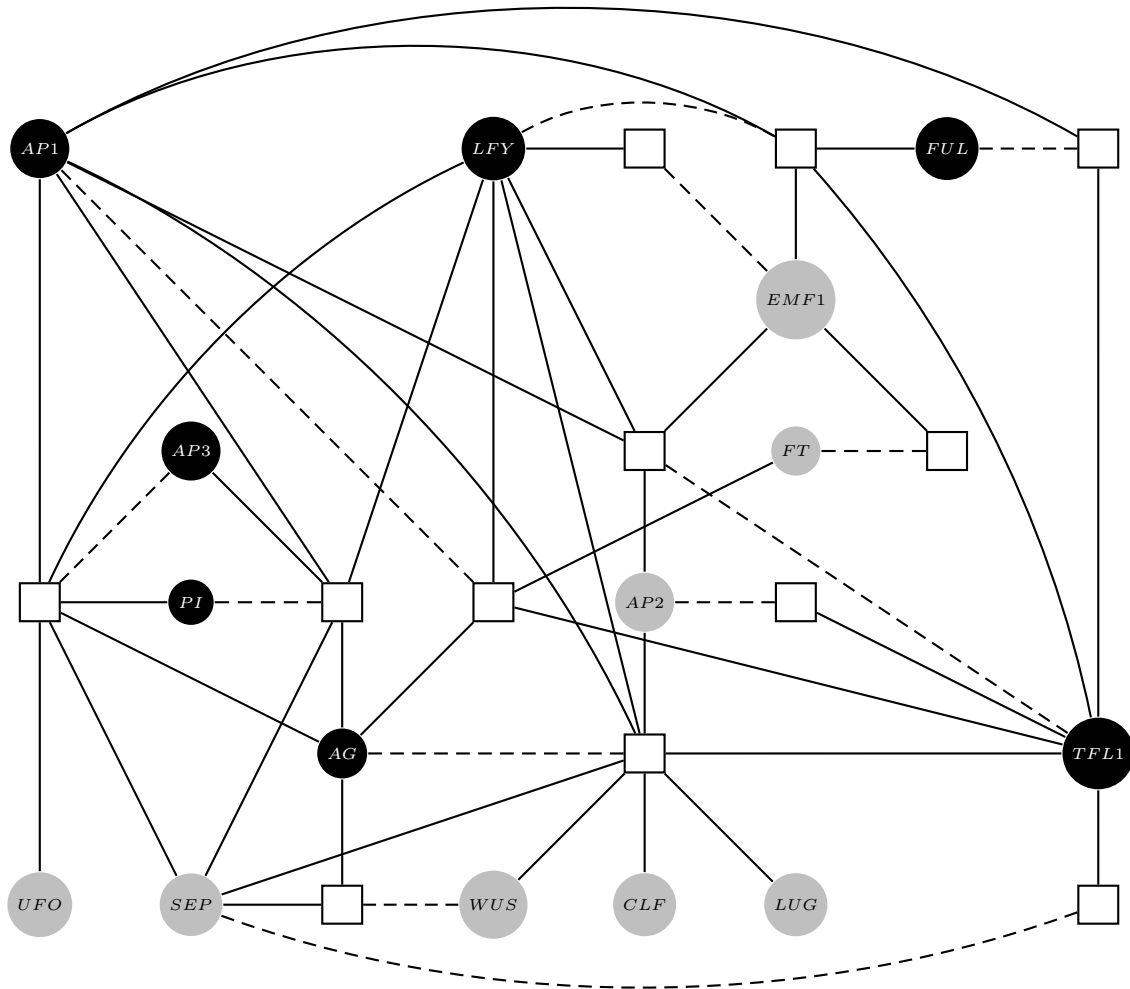
### Construire le réseau de jeux

**Structure.** Le réseau de jeux a été construit à partir du réseau de régulation et des tables d'évolution. Plus précisément, à chaque table d'évolution d'un gène donné est associé un jeu auquel participent le gène considéré et tous ses prédécesseurs dans le réseau de régulation. La figure 5.13 présente la structure du réseau de jeux sans en détailler les gains.

**Gains.** Les gains des différents jeux sont attribués en fonction de la table d'évolution. Ainsi, à chaque gène correspond un jeu dans lequel on lui attribue des gains égaux soit à 0 soit à 1. Si un joueur participe à plusieurs jeux, les gains en 0/1 ne lui sont attribués que dans un seul jeu (celui qui correspond à sa table d'évolution). Dans les autres jeux, ses gains seront tous égaux à  $\varepsilon$ . Dans le réseau de la figure 5.13, les joueurs sont reliés par un trait pointillé au jeu qui leur attribue leur gain, et par un trait plein aux autres jeux. Trois joueurs n'ont pas de table d'évolution attribuée, et donc ne sont reliés à aucun jeu par des pointillés. Il s'agit des gènes UFO, LUG et CLF qui ne sont influencés par aucun des autres agents.

Reprenons l'exemple de la table entre SEP et TFL1 pour détailler l'attribution des gains. La figure 5.14 présente le jeu associé à cette table. Dans cette table, TFL1 influence SEP. TFL1 est alors qualifié de « *joueur d'entrée* », et SEP de « *joueur de sortie* ». Les gains de TFL1 sont tous égaux à  $\varepsilon$ , et les gains de SEP sont conformes à la table d'évolution : si la stratégie de SEP correspond à l'état donné par la table d'évolution, alors son gain est de 1, sinon son gain est de 0.

La figure 5.15 présente l'attribution des gains correspondant à la table d'évolution de WUS. Dans ce cas, WUS est à la fois gène d'entrée et de sortie. Son gain sera donc de 1 si son état prévu (colonne de droite) est identique à son état effectif (colonne de gauche), et 0 sinon.



En noir les agents à trois stratégies, en gris ceux à deux stratégies. Les rectangles représentent des jeux dont on ne détaille pas les gains. Un agent relié à un jeu par un trait pointillé est un gène de sortie pour ce jeu, et ses gains sont attribués en accord avec les tables d'évolution. Un agent relié à un jeu par un trait plein est un gène d'entrée, et tous ses gains sont égaux à  $\epsilon$ .

FIG. 5.13 – Réseau de jeux d'*Arabidopsis thaliana*

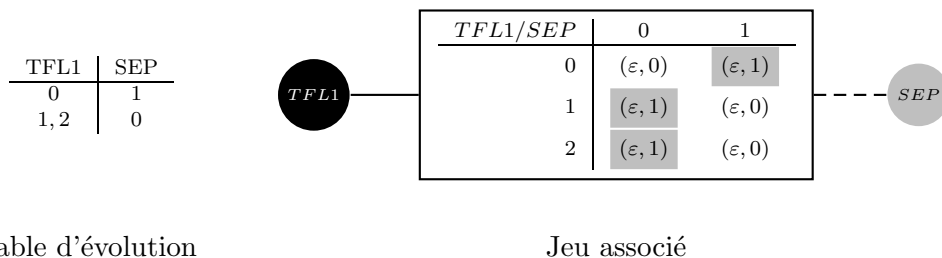


Table d'évolution

Jeu associé

Les agents reliés au jeu par un trait plein sont les gènes d'entrée. Les gènes de sortie sont reliés au jeu par un trait pointillé. En grisé dans le jeu les équilibres de Nash.

FIG. 5.14 – Jeu associé à la table d'évolution de SEP

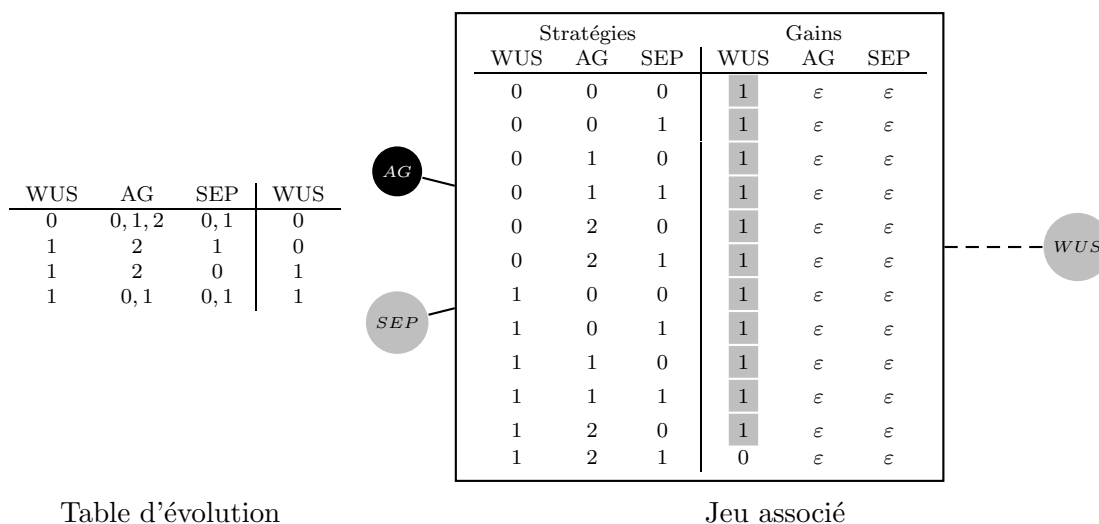


Table d'évolution

Jeu associé

Les agents reliés au jeu par un trait plein sont les gènes d'entrée. Les gènes de sortie sont reliés au jeu par un trait pointillé. En grisé dans le jeu les équilibres de Nash.

FIG. 5.15 – Jeu associé à la table d'évolution de WUS

Sur les deux figures 5.14 et 5.15 sont également présentés les équilibres de Nash des jeux. Au vue des règles d'attribution des gains, ces équilibres correspondent exactement aux états stables de la table d'évolution. Nous ne détaillons pas ici les gains de tous les jeux, mais ceux-ci peuvent se déduire des tables d'évolution présentées dans l'annexe C à partir des règles énoncées précédemment.

### Équilibres

La composition des équilibres locaux de chaque jeu du réseau nous a permis de trouver quarante équilibres globaux parmi les 559872 configurations possibles. Plusieurs de ces équilibres sont identiques, exception faite des niveaux d'expression des gènes LUG, CLF et UFO. Ceci est dû à l'absence de régulation de ces trois gènes. En effet, dans notre modélisation, ces gènes se voient attribuer les mêmes gains quelles que soient leur stratégie. De fait, ces agents sont auto-indépendant (définition 3.14, page 67) et donc ne permettent pas de réduire le nombre d'équilibres globaux (lemme 3.1, page 68).

Dans le cadre d'un fonctionnement normal du réseau de régulation et du développement floral d'*A. thaliana*, les gènes LUG et CLF se trouvent à un niveau 1 d'expression. On ne trouve plus alors que dix équilibres globaux qui correspondent effectivement à des états stables biologiques, et plus précisément à des états menant à terme à des cellules de types différents. Le tableau 5.2 présente ces équilibres et leur correspondance avec le type cellulaire.

Les résultats obtenus avec la modélisation par réseaux de jeux sont conformes à ceux présentés par Espinosa-Soto *et al.* dans [ESPLAB04] dans le cadre d'une souche non mutée d'*A. thaliana*. On peut remarquer en particulier que les deux configurations d'équilibre pour les pétales et les étamines ne se différencient que par le niveau d'expression du gène UFO. Ce résultat, observé dans [KM96], indique que ce gène n'est pas critique pour le maintien de l'identité cellulaire des pétales et étamines. Les quatre équilibres de l'inflorescence sont identiques, exceptions faites

	Types cellulaires									
	Inflorescence				Sépales	Pétales	Étamines		Carpelles	
FT	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
EMF1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
TFL1	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0
LFY	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
FUL	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
AP1	0	0	0	0	2	2	2	0	0	0
AP3	0	0	0	0	0	2	2	2	2	0
PI	0	0	0	0	0	2	2	2	2	1
AG	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
UFO	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
WUS	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
AP2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
SEP	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
LUG	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CLF	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 5.2 – Équilibres globaux correspondant à un fonctionnement normal

des niveaux d'expression de UFO et WUS, et correspondent à des observations faites dans [BGHS02, HL01].

En ce qui concerne les autres équilibres globaux fournis par notre modèle, ils sembleraient correspondre à des états d'équilibres existant chez des souches mutantes d'*A. thaliana*, obtenues en contraignant les niveaux d'expression de certains gènes. En particulier, dans le cas des mutants où le gène LUG se voit imposer un niveau d'expression de 0, nous retrouvons dix équilibres globaux, qui correspondent aux observations de [LM95].

## 5.5 Bilan

Dans ce chapitre nous avons présenté les réseaux de jeux dans le cadre de la modélisation des réseaux de régulation génétique. La régulation génétique décrit les interactions entre des gènes qui peuvent s'activer ou s'inhiber. Dans le cas d'une activation (respectivement une inhibition), l'augmentation du taux d'expression du gène source entraîne l'augmentation (respectivement la diminution) du taux d'expression du gène cible. Ces processus sigmoïdaux sont généralement discrétisés, et considèrent des niveaux d'expression (données discrètes) des gènes plutôt que leurs taux d'expression (données continues).

Nous avons défini des jeux élémentaires modélisant les régulations élémentaires (un gène activant ou inhibant un autre gène) et qui se combinent pour former des réseaux plus complexes. Nous avons en particulier décrit la construction des réseaux de jeux modélisant les quatre circuits élémentaires de régulation (deux gènes s'influençant mutuellement) ainsi que la modélisation d'un réseau constitué de deux circuits élémentaires. La définition des jeux élémentaires repose sur une règle d'attribution des gains qui, informellement, exprime que le gain d'un gène est d'autant plus élevé que son niveau d'expression est conforme aux influences qu'il subit. Les équilibres globaux du réseau de jeux en stratégies pures correspondent alors aux états stables du réseau régulation.

La modélisation par les réseaux de jeux a été appliquée dans le cadre de réseaux de régulation réels. Nous avons notamment modélisé un réseau de trois gènes intervenant lors de la division



cellulaire. Les deux équilibres globaux en stratégies pures du réseau de jeux correspondent alors aux deux situations d'équilibres biologiques. La modélisation du réseau de quinze gènes impliqué dans le développement cellulaire des fleurs d'*Arabidopsis thaliana* a mis en évidence quarante équilibres (sur 559872 configurations possibles). Dix d'entre eux correspondent à des situations d'équilibres biologiques dans le cadre d'un développement cellulaire normal, et il semblerait que les équilibres restants correspondent à des équilibres biologiques potentiels, existants chez des souches mutantes d'*A. thaliana*.

Les réseaux de jeux ont été utilisés pour modéliser d'autres réseaux d'interactions que les réseaux de régulation. Ainsi dans [CDMMar] Chafika Chettaoui *et al.* modélisent un réseau de transduction du signal, le système PAs, impliqué dans la migration des cellules cancéreuses. La modélisation a mis en évidence deux équilibres globaux en stratégies pures, qui ont été identifiés *a posteriori* comme des équilibres biologiques.

Plus généralement, la modélisation par réseaux de jeux demande de définir les agents, les stratégies et les gains de ce réseau. Dans le cadre de réseaux d'interactions biologiques, les agents pourront être des protéines, des ARN, des métabolites... Les stratégies modélisent les influences qu'un agent peut avoir sur son environnement. Ainsi, dans le cas d'une protéine on pourra s'intéresser à sa concentration dans la cellule, pour une molécule on pourra étudier son degré d'affinité ou encore sa conformation. Enfin, les gains permettent de modéliser la dynamique et le type d'interactions, et se définissent par une politique d'attribution.

La modélisation repose essentiellement sur la règle d'attribution des gains. En effet, cette règle conditionne les gains, et donc les équilibres locaux et globaux. La règle que nous proposons est élémentaire et permet, sur les exemples que nous avons modélisés, de capturer l'ensemble des états stables du réseau de régulation.

Dans une certaine mesure, la valeur des gains (dans notre cas 0 ou 1) n'est pas importante si l'ordre entre les configurations est respecté (par exemple si  $x$  active  $y$  alors  $u_y(0_x, 0_y) > u_y(0_x, 1_y)$ ). En effet, étant donné un ordre entre les configurations, les équilibres de Nash (et donc les équilibres globaux) *en stratégies pures* sont identiques quelques soient les valeurs des gains respectant cet ordre. Autrement dit, les états stables restent inchangés par modification croissante (*i.e.* respectant l'ordre) des gains.

Les états stables d'un réseau de régulation étant capturés par les équilibres globaux en stratégies pures, se pose alors la question des cycles limites. Nous avons pu voir dans le cas des circuits élémentaires de régulation que l'absence d'équilibre pure indique la présence de cycles limites. Néanmoins, ces cycles ne sont pas capturés avec précision, et de plus ils peuvent exister en parallèle des états stables et donc des équilibres purs. L'idée serait alors de définir une politique d'attribution des gains permettant de capturer à la fois les états stables par les équilibres purs, et les cycles limites par les équilibres mixtes.



## Chapitre 6

---

---

# GNET-PAD POUR LA MODÉLISATION DES RÉSEAUX DE JEUX

*Ce chapitre présente GNET-PAD, plateforme logicielle que nous développons pour permettre la modélisation des réseaux de jeux.*

Dans le but d’analyser des réseaux de jeux composés de plusieurs dizaines d’agents, nous développons une plateforme logicielle, appelée GNET-PAD, qui se fonde sur une interface entre GAMBIT — une librairie de calcul des équilibres de Nash — et JGRAPH-PAD — à la fois librairie de modélisation des réseaux et interface graphique.

GNET-PAD permet la modélisation de réseaux de jeux, le calcul des équilibres locaux et globaux en stratégie pures, l’analyse des dépendances, ainsi que la normalisation d’un jeu, ou du réseau dans son ensemble. Après avoir présenté GAMBIT, JGRAPH-PAD et GNET-PAD, nous illustrons la recherche des équilibres sur l’exemple de la régulation tumorale du chapitre 5. La normalisation est, quant à elle, présentée sur l’exemple de la figure 4.11 du chapitre 4.

## Présentation de GNET-PAD

GNET-PAD s’inscrit dans le cadre des outils de modélisation pour la biologie, à l’image de SMBio-Net (*Selection of Models of Biological Networks*, [Ric05, GBC<sup>+</sup>04]) ou de GNA (*Genetic Network Analyzer*, [dJGHP01, dJGHP03]). GNET-PAD se fonde sur un interfaçage entre GAMBIT et JGRAPH-PAD.

### GAMBIT

GAMBIT est la librairie référence pour la modélisation de jeux sous formes stratégique et extensive. *Open Source*, développée en C++, principalement par Theodore Turocy, Richard McKelvey et Andrew McLennan ([MMT06]), GAMBIT fournit un ensemble d’outils pour la construction et l’analyse de jeux finis non-coopératifs et met à disposition de l’utilisateur plusieurs algorithmes de calculs des équilibres de Nash, en stratégies pures ou mixtes.

Concernant les équilibres purs, il est en particulier possible de réduire les jeux stratégiques par suppression des stratégies fortement dominées (voir le chapitre 1). Les équilibres mixtes peuvent être calculés par résolution d'un système polynomial (présenté dans le chapitre 1), mais d'autres algorithmes sont également accessibles suivant les propriétés du jeu. Citons, entre autres, les algorithmes de Govidan et Wilson ([GW03]) dans le cadre général, ou, dans le cadre des jeux à deux joueurs, des algorithmes inspirés de la programmation linéaire et se fondant sur une représentation précise de la forme extensive [KMvS96].

Dans GNET-PAD, GAMBIT est utilisé pour calculer les équilibres de Nash en stratégies pures des différents jeux qui composent le réseau.

### JGRAPH et JGRAPH-PAD

La librairie JGRAPH développée en Java permet la description et la manipulation de graphes ou réseaux. De nombreux algorithmes sont disponibles, tels que la recherche de plus court chemin, ou le problème de l'arbre couvrant de poids minimum. Les domaines d'application sont vastes, citons par exemple la possibilité de modéliser :

- des diagrammes UML et des bases de donnée ;
- des problèmes de trafic ou de flot, des réseaux de télécommunications ;
- des réseaux électroniques, biochimiques, écologiques, financiers ou sociaux.

Certains logiciels professionnels utilisent d'ailleurs cette librairie, en particulier MetaFlux Viewer qui autorise la visualisation de voies métaboliques et la modélisation du flux entre les composants importants de ces voies ([BCC<sup>+</sup>]). JGRAPH-PAD est le nom de l'interface utilisateur graphique (GUI) pour la manipulation de réseaux qui se fonde sur la librairie JGRAPH pour leur description. En plus d'autoriser l'accès à l'ensemble de la librairie JGRAPH, JGRAPH-PAD fournit un cadre graphique de modélisation que nous avons modifié pour l'adapter aux besoins spécifiques des réseaux de jeux.

### GNET-PAD

GNET-PAD est la réunion de JGRAPH-PAD et GAMBIT au sein d'une même plateforme logicielle. L'interface graphique de GNET-PAD dérive de celle de JGRAPH-PAD. Alors que ce dernier autorise la créations de lignes et de sommets de toutes formes, les réseaux de GNET-PAD se composent de sommets-cercles assimilés aux joueurs et de sommets-rectangles correspondant aux jeux. Les joueurs sont définis par la classe (créée par l'utilisateur) à laquelle ils appartiennent, et qui impose les stratégies accessibles à l'agent. À un jeu sont associés les gains de chacun des joueurs reliés par un arc.

La figure 6.1 présente les éléments caractéristiques d'un réseau modélisé avec GNET-PAD. Les différentes fonctionnalités de GNET-PAD sont présentées au travers des exemples des deux sections suivantes. Le tableau 6.1 résume les principales caractéristiques de GAMBIT, JGRAPH-PAD et GNET-PAD.

## GNET-PAD et les équilibres de la régulation tumorale

La figure 6.2 propose la modélisation de réseau  $p53 - p21 - Cdk2$  impliqué dans la régulation de cellules tumorales et étudié dans le chapitre 5. Elle présente également les équilibres locaux du jeu entre  $p21$  et  $Cdk2$ , ainsi que les équilibres globaux.

Les équilibres locaux, c'est-à-dire les équilibres de Nash des différents jeux qui composent le réseaux sont calculés à l'aide de GAMBIT. Nous avons implanté l'algorithme combinant les

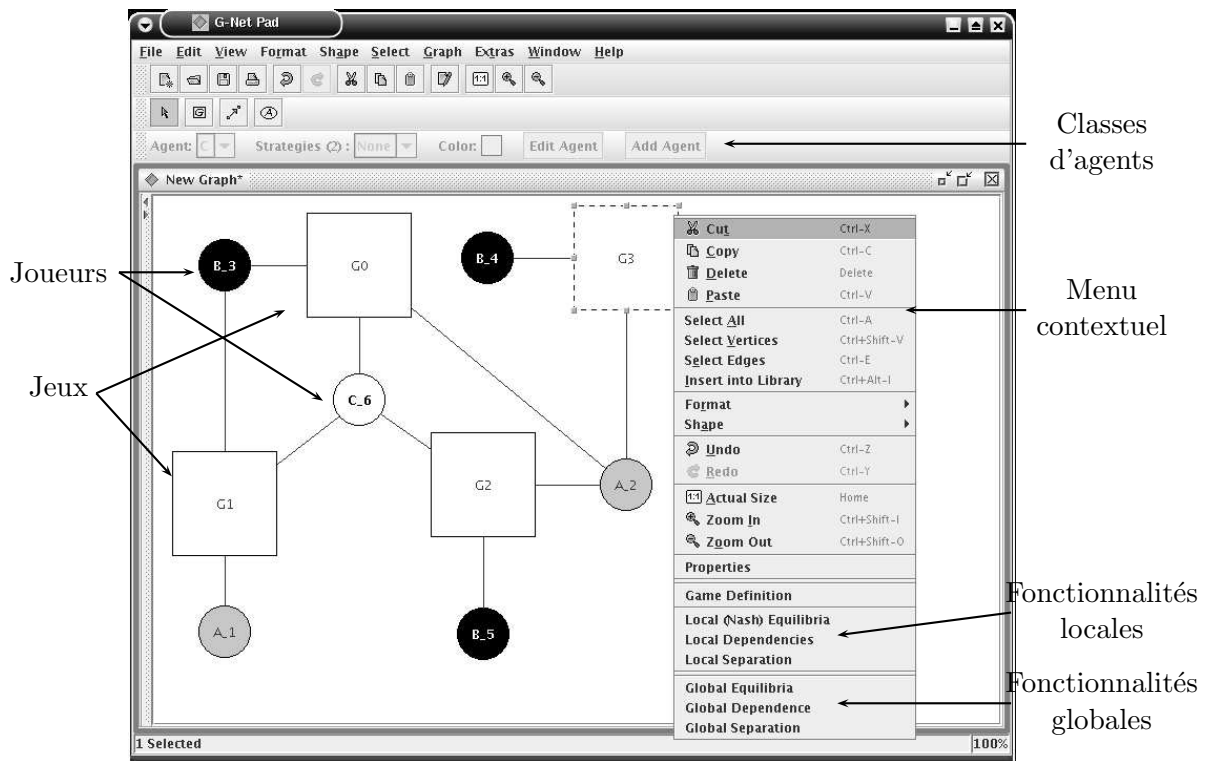


FIG. 6.1 – Éléments caractéristiques d'un réseau modélisé avec GNET-PAD

	Langage	# lignes	Fonctionnalités
GAMBIT	C++	77000	Modélisation des jeux stratégiques Calcul des équilibres de Nash
JGRAPH	Java	18000	Librairie de graphes
JGRAPH-PAD	Java	50000	Interface graphique Des sommets et des lignes
GNET-PAD	Java	10000 +GAMBIT +JGRAPH-PAD	Des jeux et des joueurs Équilibres locaux Équilibres globaux Dépendances (locales et globales) Normalisation (locale et globale) Sauvegarde sous un format inspiré du XML

TAB. 6.1 – Principales caractéristiques de GNET-PAD

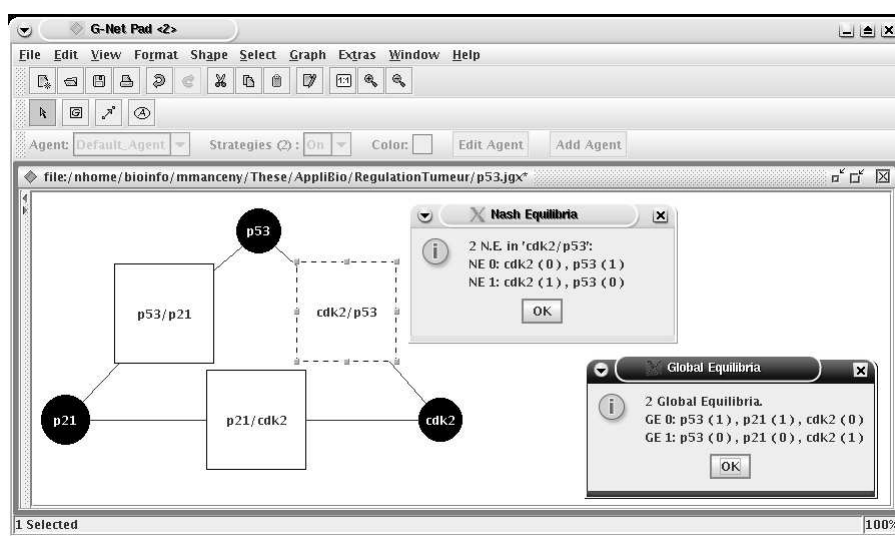


FIG. 6.2 – Équilibres

équilibres locaux pour déterminer les équilibres globaux résultants. Celui-ci part d'un jeu initial et calcule les équilibres de Nash. Il cherche alors un équilibre compatible dans les jeux ayant un joueur commun avec ceux du jeu initial. Si aucun équilibre compatible n'existe entre les deux jeux, alors il n'existe pas d'équilibre global. Si la compatibilité est possible, l'algorithme continue jusqu'à avoir visité l'ensemble des jeux.

## GNET-PAD, dépendances et normalisation

Les figures 6.3 et 6.4 présentent l'exemple étudié dans le chapitre 4 pour la normalisation d'un réseau de jeux.

**Dépendances.** La première étape de la normalisation demande de déterminer les dépendances entre les joueurs du réseau. Dans GNET-PAD, ces dépendances sont calculées pour chaque jeu, et sont ensuite combinées pour déterminer les dépendances globales. La figure 6.4 illustre le calcul des dépendances. Deux formats de représentation sont disponibles : soit sous format .DOT ([GKN02]) qui décrit le graphe de dépendances, soit dans un format postscript qui représente effectivement le graphe.

**Normalisation.** À l'aide des dépendances il est possible de déterminer tout d'abord la structure du réseau normalisé, puis d'attribuer les gains dans un deuxième temps. Dans GNET-PAD, la normalisation peut être appliquée à deux niveaux : au niveau local en normalisant un des jeux du réseaux, ou au niveau global en normalisant tous les jeux du réseau. La figure 6.4 illustre la normalisation.

Pour conclure ce chapitre, la figure 6.5 présente le réseau du chapitre 5 impliqué dans la croissance des fleurs d'*Arabidopsis thaliana*.

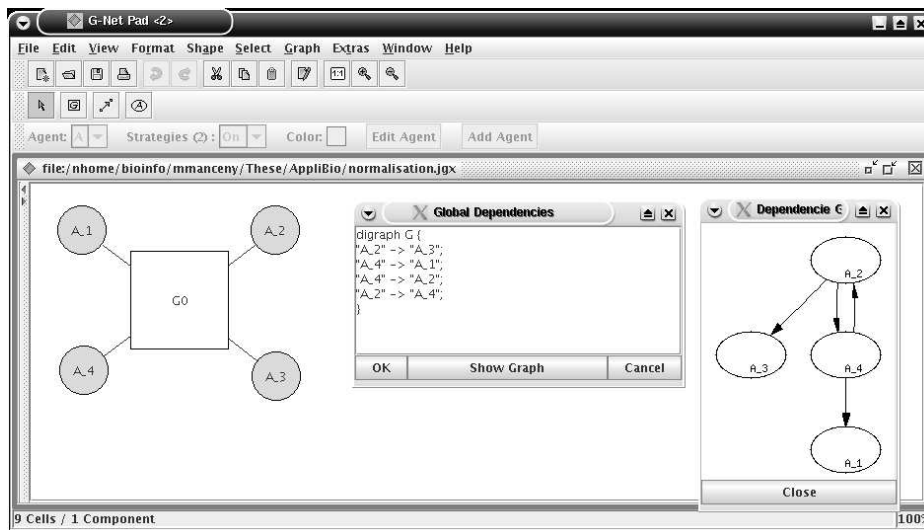


FIG. 6.3 – Calcul de dépendances

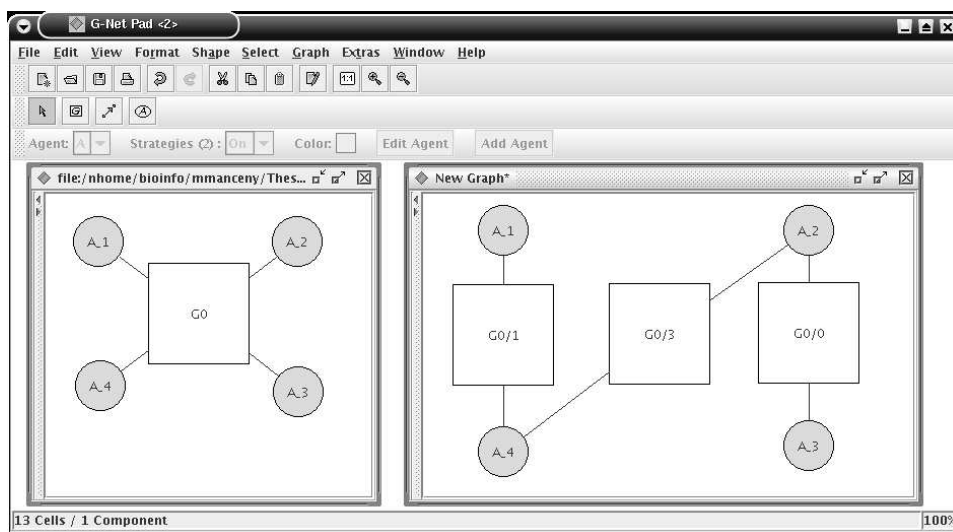


FIG. 6.4 – Normalisation

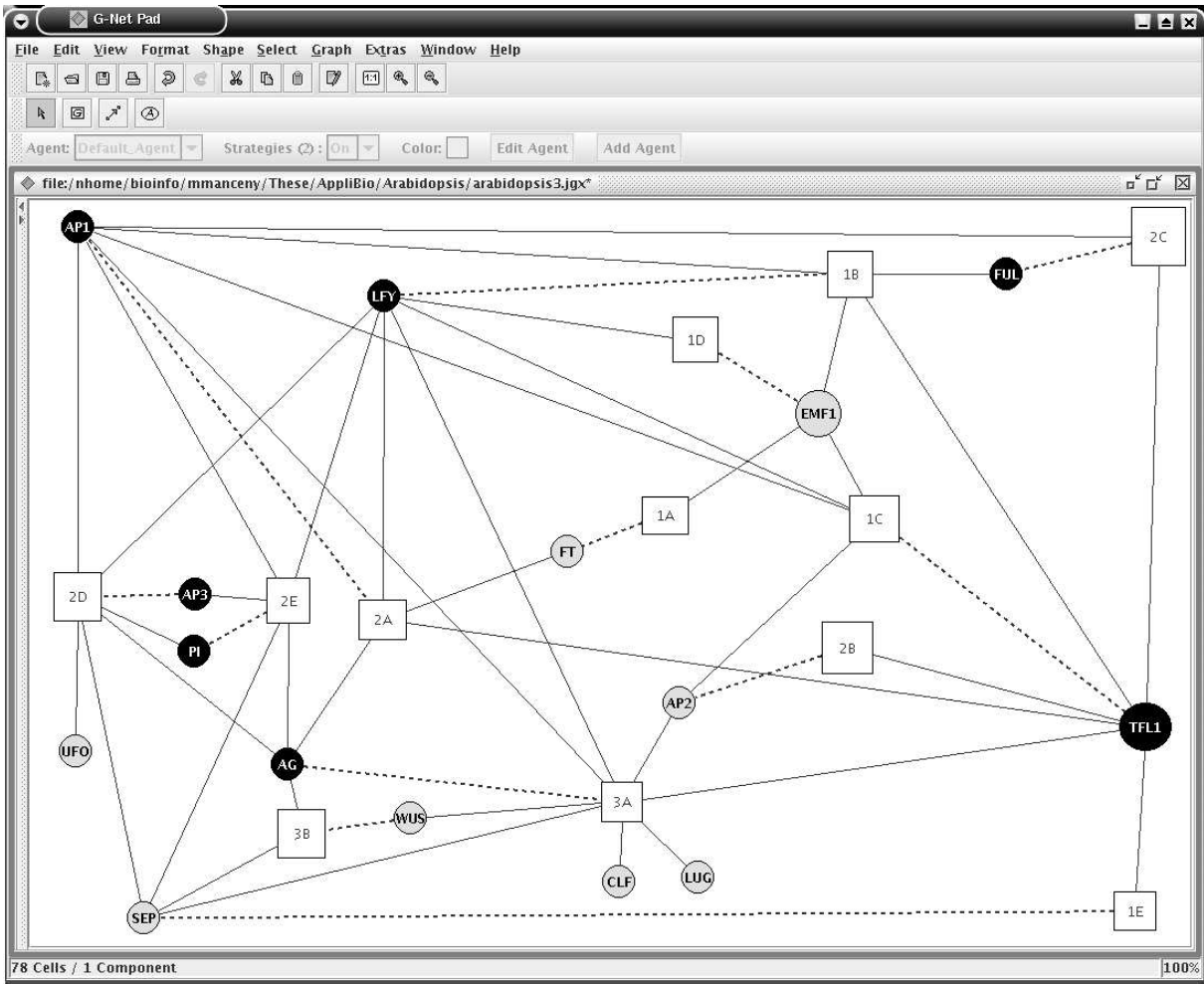


FIG. 6.5 – *Arabidopsis thaliana*







---

---

## CONCLUSION

Dans ce document nous avons présenté les réseaux de jeux, un formalisme s'appuyant sur la théorie des jeux et permettant la modélisation des interactions locales.

La théorie des réseaux de jeux se fonde sur les *jeux stratégiques* qui décrivent des situations de jeux non-coopératives où les agents en interaction cherchent à maximiser leurs gains. Dans les jeux stratégiques, les joueurs jouent simultanément, en étant parfaitement informés des stratégies possibles des adversaires, et des gains associés. Un des points fondamentaux de la théorie des jeux est la recherche des équilibres de Nash, autrement dit des situations dans lesquelles chaque joueur est satisfait de la stratégie qu'il a choisie, au regard des stratégies choisies par ses adversaires.

Nous avons étendu les jeux stratégiques en autorisant les agents à participer à plusieurs jeux simultanément, créant ainsi un « réseau de joueurs et de jeux ». À chacun des jeux du réseau est alors associée une fonction de gains dont les paramètres correspondent aux stratégies des joueurs qui participent au jeu, et non à pas celles de tous les agents.

Dans le cadre des réseaux de jeux, les équilibres se définissent à deux niveaux : les *équilibres locaux* sont les équilibres de Nash de chacun des jeux du réseau, alors que les *équilibres globaux* définissent une situation d'équilibre pour tous les joueurs et tous les jeux du réseau. Nous avons proposé une méthode de calcul des équilibres globaux se fondant sur la combinaison des équilibres locaux compatibles.

Plusieurs réseaux de jeux, distincts par leurs structures ou par leurs gains, peuvent fournir des équilibres globaux identiques. Nous avons alors défini une notion d'*équivalence entre réseaux de jeux* fondée sur l'égalité des joueurs, des stratégies et des équilibres globaux.

Bien que des réseaux équivalents modélisent la même situation (c'est-à-dire admettent les mêmes équilibres globaux), leur capacité à rendre compte de la localité d'interaction dépend fortement de leur structure. Nous nous sommes alors intéressé à la recherche des *modules élémentaires* composant un réseau. Ces modules élémentaires mettent en évidence les interactions locales du réseau, mais également les *dépendances* entre joueurs. Plus précisément, nous avons construit un algorithme de *normalisation* d'un jeu stratégique qui calcule un réseau de jeux équivalent, composé de modules élémentaires et respectant les dépendances du jeu initial.

Nous avons utilisé les réseaux de jeux dans le cadre de la modélisation des *réseaux de régulation génétique* qui décrivent les interactions entre des gènes pouvant s'activer ou s'inhiber. La modélisation repose sur la définition de jeux représentant les régulations élémentaires (un gène activant ou inhibant un autre gène) et qui se combinent pour former des réseaux plus

complexes. Les équilibres globaux du réseau de jeux en stratégies pures correspondent alors aux états stables du réseau régulation. Dans le modèle, les jeux incarneraient alors des *modules*, c'est-à-dire des groupes de gènes fortement couplés.

Pour faciliter le travail de modélisation, nous avons développé une plateforme logicielle, GNET-PAD, que nous avons utilisée dans le cadre de réseaux de régulation réels. L'une des applications concernait un modèle relativement important en nombre de gènes d'un réseau impliqué dans le développement cellulaire des fleurs d'*Arabidopsis thaliana*. La modélisation a mis en évidence quarante équilibres (sur les 559872 configurations possibles). Dix d'entre eux correspondent à des situations d'équilibres biologiques dans le cadre d'un développement cellulaire normal, certains des équilibres restants correspondent à des équilibres biologiques potentiels, existant chez des souches mutantes d'*A. thaliana*.

## Perspectives

Les perspectives envisagées pour la poursuite de nos travaux sont de trois ordres.

- *Domaines d'application.*

La première perspective envisagée concerne les domaines d'application des réseaux de jeux. Nous avons vu dans le chapitre 5 que les réseaux de jeux permettaient une modélisation des réseaux de régulation génétique. Plus généralement, le cadre applicatif s'étend à tous les systèmes où l'étude de la localité est nécessaire à la compréhension du fonctionnement de ce système. Nous envisageons en particulier d'appliquer les réseaux de jeux à des problèmes liés à Internet ou aux réseaux de télécommunication.

- *Zones d'équilibres compatibles.*

Les équilibres globaux décrivent une situation d'équilibre pour tous les joueurs et tous les jeux du réseau. Il existe cependant certains réseaux n'admettant pas de tels équilibres. Se pose alors la question de définir le fonctionnement du réseau dans un tel cas. Nos premières réflexions nous poussent à considérer des zones d'équilibres compatibles, autrement dit rechercher des ensembles de joueurs et jeux admettant des équilibres communs. Il serait alors possible de découper le réseau suivant ces zones, qui ne seraient reliées entre elles que par quelques agents. Suivant la stratégie de ces agents de liaison, quelques zones seulement seraient en situation d'équilibre. Ce découpage permettrait éventuellement de modéliser la réponse du réseau à différents phénomènes extérieurs imposant des conditions sur les agents de liaison.

- *Jeux multicritères.*

Cette branche de la théorie des jeux a été initiée par Blackwell en 1956 ([Bla56]). Dans ces jeux, contrairement à la forme stratégique, les agents cherchent à réaliser plusieurs objectifs, les gains associés à ceux-ci n'étant pas comparables. Autrement dit, le gain de la forme stratégique devient un vecteur de gains dans les jeux multicritères. Il pourrait être intéressant de modéliser les jeux multicritères par un réseau de jeux où, par exemple, chaque jeu serait associé à un des critères. De plus les notions d'équilibres développées dans les jeux multicritères diffèrent sensiblement de celles des réseaux de jeux. En particulier, les équilibres Pareto correspondraient à une configuration où les joueurs sont en équilibre de Nash dans au moins un des jeux auxquels ils participent (et non pas tous). D'autres raffinements des équilibres de Nash existent (équilibres parfaits, équilibres propres) qui permettraient d'élargir les notions d'équilibres dans les réseaux de jeux.





---

---

# ANNEXES





## Annexe A

---

---

### LA FORME EXTENSIVE SUR UN EXEMPLE

Les réseaux de jeux se fondent sur les jeux stratégiques. Il nous semble cependant intéressant de présenter également la forme extensive, qui est notamment utilisée dans le chapitre 2 consacré à l'état de l'art sur la localité d'interactions en théorie des jeux. Cet annexe n'a pas pour but de définir formellement la forme extensive, mais plutôt d'en donner l'intuition au travers d'un exemple. La forme extensive se distingue de la forme stratégique sur deux points :

- d'une part, les joueurs ne jouent pas simultanément,
- d'autre part, ils peuvent ne pas être parfaitement informés.

L'exemple suivant permet de détailler ces deux aspects.

#### EXEMPLE A.1 (ROMÉO ET JULIETTE JOUENT AUX CARTES)

*Roméo et Juliette ont finalement décidé de jouer aux cartes en suivant des règles un peu particulières. Au début de la partie, chaque joueur met un euro dans un pot commun. Roméo tire alors aléatoirement une carte dans un paquet contenant pour moitié des cartes rouges (les cœurs et les carreaux), et pour moitié des cartes noires (les piques et les trèfles). Roméo regarde sa carte sans la montrer à Juliette et décide soit de continuer, soit de s'arrêter.*

- *Si Roméo s'arrête, il montre la carte à Juliette et le jeu se termine.*
  - *Si la carte est rouge, Roméo prend l'argent du pot.*
  - *Si la carte est noire, Juliette prend l'argent du pot.*
- *Si Roméo continue, il rajoute un euro dans le pot et finit son tour.*

*Juliette a alors la possibilité soit d'augmenter la mise, soit de passer la main.*

- *Si Juliette passe la main, Roméo prend l'argent du pot.*
- *Si Juliette augmente la mise, elle rajoute un euro dans le pot, et la carte est révélée.*
  - *Si la carte est rouge, Roméo prend l'argent du pot.*
  - *Si la carte est noire, Juliette prend l'argent du pot.*

Dans ce jeu, les joueurs ne jouent pas simultanément, le choix de Roméo (Continuer ou Arrêter) intervient avant le choix de Juliette (Augmenter ou Passer). De plus, Juliette n'est pas totalement informée, elle ne connaît pas la couleur de la carte que Roméo a tirée.

La figure A.1 propose la forme extensive associée à ce jeu. Elle se présente sous la forme d'un arbre. Le sommet le plus à gauche, la racine, correspond au début du jeu. Deux arcs en partent, et indiquent la probabilité que Roméo a de tirer une carte rouge, ou noire. Les sommets noirs ou

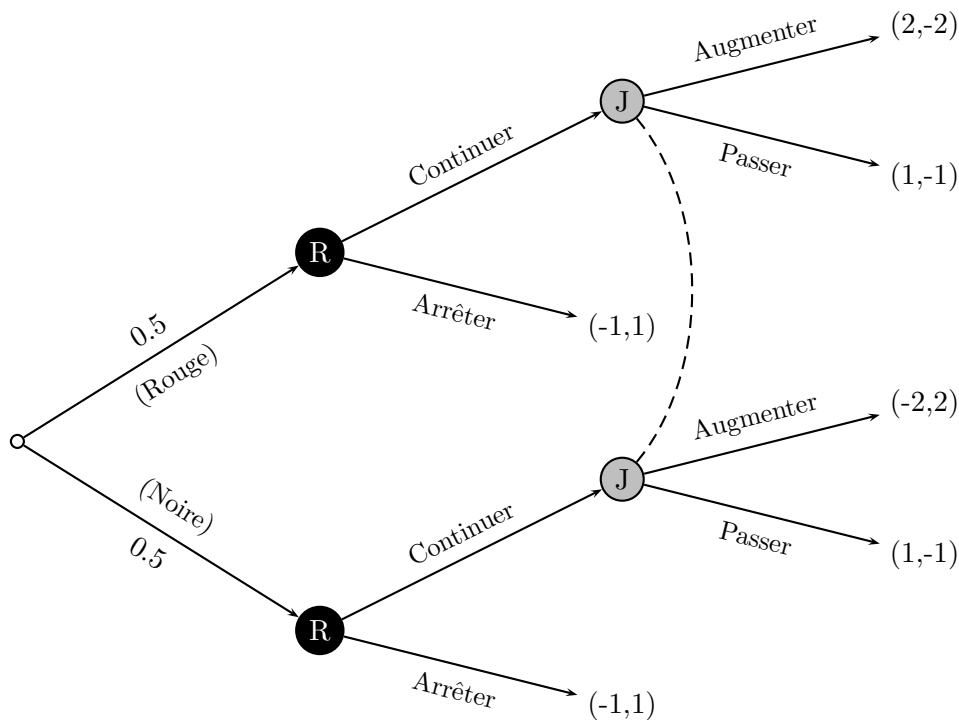


FIG. A.1 – Forme extensive du jeu de cartes entre Roméo et Juliette

gris modélisent la décision que doit prendre Roméo (sommets noirs) ou Juliette (sommets gris). Les six feuilles de l'arbre (les sommets à droite) représentent les différentes issues possibles du jeu. Un couple de gains leur est associé correspondant respectivement aux gains de Roméo et Juliette.

Lorsque Juliette choisit de passer la main, ou d'augmenter la mise elle ne connaît pas la couleur de la carte. Donc les deux situations « Roméo continue et la carte est rouge » ou « Roméo continue et la carte est noire » sont totalement équivalentes pour Juliette. On représente cette situation en reliant par un trait pointillé les deux sommets où Juliette a un choix à faire. Ainsi, lorsque Juliette choisit d'augmenter la mise, elle ne sait pas si elle est dans la partie haute de la forme extensive (carte rouge) et donc gagnera deux euros, ou si elle est dans la partie basse (carte noire) et qu'elle perdra deux euros.

De par sa représentation sous forme d'arbre, la forme extensive permet de capturer la séquentialité des choix stratégiques de chaque joueur. Relier les sommets d'un joueur par un trait pointillé permet également de modéliser l'absence de connaissance de ce joueur par rapport à ce qui a pu se passer plus tôt dans le jeu.

## Annexe B

---

---

# JEUX RÉPÉTÉS ET LOCALITÉ SPATIALE

Historiquement, les premiers travaux concernant la localité en théorie des jeux datent des années 90 et concernent les jeux répétés et la localité dite *spatiale*. Dans l'article fondateur ([Ell93]), Glenn Ellison s'intéresse plus précisément aux jeux de coordination, et à l'évolution des stratégies jouées par les agents.

### Jeux de coordination

Succinctement, les jeux de coordination étudiés par Ellison sont des jeux stratégiques  $\langle A, C, u \rangle$  à deux joueurs où chaque joueur a la possibilité de coopérer avec son adversaire (stratégie  $C$ ), ou bien d'être égoïste (stratégie  $E$ ). Les gains associés à chacune des configurations sont définis par la table suivante :

1/2	$C_2$	$E_2$
$C_1$	$(a, a)$	$(c, d)$
$E_1$	$(d, c)$	$(b, b)$

On impose de plus que  $a > d$  — si l'adversaire est prêt à coopérer, la meilleure stratégie à jouer est la coopération — et  $b > c$  — si l'adversaire est égoïste, il vaut mieux être égoïste. Ainsi les configurations  $(C_1, C_2)$  et  $(E_1, E_2)$  sont équilibres de Nash.

### Jeux répétés

Dans ces jeux, on considère un ensemble  $A$ , généralement grand, d'agents. Ces agents jouent les uns contre les autres, en suivant les règles du jeu de coordination. Ces jeux sont répétés, *i.e.* on considère un ensemble de date  $t = 1, 2, 3, \dots$  et à chacune de ces dates un agent  $i \in A$  choisit une stratégie  $c_{(i,t)} \in \{C_i, E_i\}$ .

Le gain  $g_{(i,t)}$  d'un agent  $i$  à la date  $t$  est la somme de ses gains  $u_i$  dans les jeux de coordination contre les agents  $j \in A, j \neq i$ . Ce gain dépend bien entendu des stratégies  $c_{(-i,t)}$  jouées par les agents  $j \neq i$  à la date  $t$ , et de la stratégie  $c_{(i,t)}$  du joueur  $i$  :

$$g_{(i,t)}(c_{(-i,t)}, c_{(i,t)}) = \sum_{j \in A - \{i\}} u_i(c_{(j,t)}, c_{(i,t)})$$

Le cœur des jeux répétés se situe dans l'étude de l'influence des stratégies jouées à une date  $t - 1$  pour choisir quelle stratégie jouer à la date  $t$ . En effet, un agent  $i$  choisira de jouer, à la date  $t$ , la stratégie qui lui aurait assuré un gain maximum à la date  $t - 1$  :

$$c_{(i,t)} = \underset{c_i \in \{C, E\}}{\operatorname{argmax}} \{g_{(i,t-1)}(c_{(-i,t-1)}, c_i)\}$$

**Localité spatiale**

Dans le modèle d'Ellison, les joueurs sont situés sur une grille rectangulaire et interagissent (*i.e.* jouent) uniquement avec leurs voisins. Un agent modifiera ainsi sa stratégie en fonction des stratégies de ses voisins, et non plus en fonction de tous les agents du jeu répété.

Ellison analyse alors la dynamique du système, c'est-à-dire l'évolution des stratégies jouées par chacun des joueurs. Il étudie en particulier la possibilité d'apparition de point fixes — des situations où aucun agent ne change sa stratégie — ainsi que l'influence des conditions initiales ou encore le nombre de voisins considérés.

Certains auteurs se sont intéressés à considérer des jeux de coordination où les relations entre les gains sont différentes de celles donnée ici. Le lecteur peut se référer à [NS00] pour un état de l'art de la localité spatiale dans les jeux répétés.

## Annexe C

### TABLES D'ÉVOLUTION D'*Arabidopsis thaliana*

Les tableaux suivants présentent les tables d'évolution des gènes composant le réseau d'*A. thaliana* étudié dans le chapitre 5. Elles indiquent le niveau d'expression vers lequel tend le gène de la colonne de droite, en fonction des niveaux d'expression des gènes des colonnes de gauche. Dans les tableaux, afin de réduire leur taille, un *X* représente n'importe quel niveau possible du gène considéré. Ainsi, dans le tableau indiquant le niveau de TFL1, AP1 possède trois niveaux d'expression, et *X* indique n'importe lequel de ces trois niveaux; dans ce même tableau, le *X* pour AP2 représente les deux niveaux qui lui sont associés.

EMF1	FT	LFY	EMF1	TFL1	SEP	TFL1	AP2
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1,2	0	1,2	0	1,2	0

AP1	TFL1	FUL	WUS	AG	SEP	WUS
<i>X</i>	1,2	0	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0
0	0	2	1	2	1	0
1	0	1	1	2	0	1
2	0	0	1	0,1	<i>X</i>	1

AG	LFY	TFL1	FT	AP1	AP1	LFY	AP2	EMF1	TFL1
2	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0	0
0	<i>X</i>	<i>X</i>	2	<i>X</i>	2	2	<i>X</i>	1	0
1	<i>X</i>	<i>X</i>	2	<i>X</i>	1	0,1	2	<i>X</i>	0
0	LFY $\geq$ TFL1	TFL1	0,1	<i>X</i>	2	1	0,1	1	0
1	LFY $\geq$ TFL1	TFL1	0,1	<i>X</i>	1	1	0,1	0	1
0,1	LFY<TFL1	TFL1	0,1	<i>X</i>	0	0	0,1	<i>X</i>	1

LFY	SEP	AP3	PI	AG	AP1	PI	SEP	LFY	UFO	AP3	PI	AG	AP1	AP3
<i>X</i>	<i>X</i>	0	<i>X</i>	0	<i>X</i>	0	1	<i>X</i>	<i>X</i>	1,2	1,2	1,2	<i>X</i>	2
<i>X</i>	1	1,2	1,2	1,2	<i>X</i>	2	0	1,2	1	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	1
<i>X</i>	1	1,2	1,2	<i>X</i>	1,2	2	<i>X</i>	1,2	1	0	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	1
1,2	0	1,2	1,2	1,2	<i>X</i>	1	<i>X</i>	1,2	1	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	1
1,2	1	0	1,2	1,2	<i>X</i>	1	0	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	0
1,2	1	1,2	0	1,2	<i>X</i>	1	<i>X</i>	<i>X</i>	0	0	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	0
1,2	1	1,2	1,2	0	0	1	<i>X</i>	<i>X</i>	0	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0
0	0	1,2	1,2	1,2	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0
0	1	0	1,2	1,2	<i>X</i>	0	0	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0	0	0	0
0	1	1,2	0	1,2	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	0
0	1	1,2	1,2	0	0	0	<i>X</i>	0	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	0	0	0

AP1	FUL	TFL1	EMF1	LFY
X	X	0	0	2
0	0	0	1	1
0	0	1,2	0	1
0	0	1,2	1	0
0	1	1,2	0	1
0	1	0	1	1
0	2	0,1	0	2
0	2	0	1	1
0	2	2	0	1
0	2	1,2	1	1
0	1	1,2	1	0
1	X	0,1	0	2
1	X	2	1	0
1	X	0,1	1	1
1	X	2	0	1
2	X	2	1	1
2	X	0,1	X	2
2	X	X	0	2

TFL1	LFY	AP1	AG	WUS	AP2	SEP	LUG	CLF	AG
TFL1<LFY		X	X	X	0	X	X	X	2
TFL1>LFY		X	X	X	X	X	X	X	0
TFL1<LFY		X	X	1	1	X	X	X	2
2	2	X	X	1	1	X	X	X	2
TFL1=LFY<2		X	X	X	1	X	X	X	0
TFL1<LFY		X	0,1	0	1	X	X	0	1
TFL1<LFY		X	2	0	1	0	X	0	1
TFL1<LFY		X	0,1	0	1	X	0	X	1
TFL1<LFY		X	2	0	1	0	0	X	1
TFL1<LFY		0	0,1	0	1	X	X	X	1
TFL1<LFY		0	2	0	1	0	X	X	1
2	2	X	0,1	0	1	X	X	0	1
2	2	X	2	0	1	0	X	0	1
2	2	X	0,1	0	1	X	0	X	1
2	2	X	2	0	1	0	0	X	1
2	2	0	0,1	0	1	X	X	X	1
2	2	0	2	0	1	0	X	X	1
2	2	1,2	0,1	0	1	X	1	1	0
TFL1<LFY		1,2	2	0	1	0	1	1	0
TFL1<LFY		1,2	0,1	0	1	X	1	1	0
2	2	1,2	2	0	1	0	1	1	0
TFL1<LFY		X	2	0	1	1	X	X	2
2	2	X	2	0	1	1	X	X	2

## Annexe D

---

---

# PREUVES

### Proposition 1.1, page 26

PROPOSITION 1.1 (ÉQUILIBRE DE NASH  $\equiv$  MEILLEURE RÉPONSE)

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Soit  $\sigma^* \in \Delta(C)$  une configuration mixte.  $\sigma^*$  est un équilibre de Nash si et seulement si toute stratégie choisie pour l'équilibre est une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs :

$$\forall i \in A \quad \sigma_i^* \in \beta_i(\sigma_{-i}^*)$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} \sigma^* \in \mathbf{Nash}(\langle A, C, u \rangle) &\Leftrightarrow \forall i \in A, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in A \quad \sigma_i^* \in \underset{\sigma_i \in \Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}} \{ \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) \} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in A \quad \sigma_i^* \in \beta_i(\sigma_{-i}^*) \end{aligned}$$

■

### Lemme 1.1, page 29

LEMME 1.1 (ÉGALITÉ DES GAINS)

Soient  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique,  $\sigma^* = (\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \in \mathbf{Nash}(G)$  un équilibre de Nash mixte. Alors :

$$\forall i \in A, \forall (k, k') \in [1 : m_i]^2 \quad \left( (\sigma_i^*[c_i^k] \neq 0 \wedge \sigma_i^*[c_i^{k'}] \neq 0) \Rightarrow \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^k) = \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^{k'}) \right)$$

PREUVE. Soit  $G$  et  $\sigma^*$  définis conformément à l'énoncé. Pour démontrer le lemme, on démontre par contraposition que

$$\forall i \in A, \forall k \in [1 : m_i] \quad \sigma_i^*[c_i^k] \neq 0 \Rightarrow c_i^k \in \beta_i^p(\sigma_{-i}^*)$$

- Supposons qu'il existe  $i \in A, k \in [1 : m_i]$  tels que  $\sigma_i^*[c_i^k] \neq 0$  et  $c_i^k \notin \beta_i^p(\sigma_{-i}^*)$ . On montre alors que  $\sigma^*$  n'est pas un équilibre de Nash.
- Soit  $l \in [1 : m_i]$  tel que  $c_i^l \in \beta_i^p(\sigma_{-i}^*)$ . On a donc :  $\pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) > \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^k)$

- Soit  $\sigma'_i$  la stratégie mixte du joueur  $i$  définie de la manière suivante :

- $\sigma'_i[c_i^k] = 0$
- $\sigma'_i[c_i^l] = \sigma_i^*[c_i^l] + \sigma_i^*[c_i^k]$
- $\sigma'_i[c_i^j] = \sigma_i^*[c_i^j]$  pour  $j \neq k, j \neq l$

(On vérifie facilement que  $\sigma'_i$  est bien définie)

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma'_i) &= \sum_{j \in [1:m_i]} \sigma'_i(c_i^j) \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&= \left( \sigma'_i[c_i^k] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^k) \right) + \left( \sigma'_i[c_i^l] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) \right) + \sum_{j \in [1:m_i] - \{k,l\}} \sigma'_i[c_i^j] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&= (0) + \left( \sigma_i^*[c_i^l] + \sigma_i^*[c_i^k] \right) \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) + \sum_{j \in [1:m_i] - \{k,l\}} \sigma_i^*[c_i^j] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&= \left( \sigma_i^*[c_i^l] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) \right) + \left( \sigma_i^*[c_i^k] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) \right) + \sum_{j \in [1:m_i] - \{k,l\}} \sigma_i^*[c_i^j] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&> \left( \sigma_i^*[c_i^l] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^l) \right) + \left( \sigma_i^*[c_i^k] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^k) \right) + \sum_{j \in [1:m_i] - \{k,l\}} \sigma_i^*[c_i^j] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&> \sum_{j \in [1:m_i]} \sigma_i^*[c_i^j] \cdot \pi_i(\sigma_{-i}^*, c_i^j) \\
&> \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*)
\end{aligned}$$

- Donc, le gain du joueur  $i$  est supérieur lorsqu'il joue  $\sigma'_i$  plutôt que  $\sigma_i^*$ , *i.e.*  $\sigma_i^* \notin \beta_i(\sigma_{-i}^*)$  et  $\sigma^*$  n'est pas un équilibre de Nash. ■

## Théorème 2.1, page 38

THÉORÈME 2.1 ( $\delta_s \Rightarrow \delta_u$ )

Soit  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique, alors :

$$\forall (i, j) \in A^2 \quad \left( \quad i\delta_{sj} \Rightarrow i\delta_{uj} \quad \right)$$

PREUVE. La preuve se fait par contraposition, *i.e.* on montre que  $i \not\delta_{uj} \Rightarrow i \not\delta_{sj}$ . Soient  $\langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique et  $(i, j) \in A^2$  deux joueurs tels que  $i \not\delta_{uj}$ . Par définition :

$$\forall c_i \in C_i, \forall c_{-ij} \in \prod_{k \in A - \{i,j\}} C_k \quad \beta_j(c_{-ij}, c_i) = \underset{c_j \in C_j}{\operatorname{argmax}} \{u_j(c_{-ij}, c_i, c_j)\}$$

Puisque  $i \not\delta_{uj}$ , on a :

$$\forall (c_i, c'_i) \in C_i^2, \forall c_{-i} \in \prod_{j \in A - \{i\}} C_j \quad u_j(c_{-i}, c_i) = u_j(c_{-i}, c'_i)$$

Donc

$$\forall (c_i, c'_i) \in C_i^2, \forall c_{-ij} \in \prod_{k \in A - \{i,j\}} C_k \quad \beta_j(c_{-ij}, c_i) = \underset{c_j \in C_j}{\operatorname{argmax}} \{u_j(c_{-ij}, c'_i, c_j)\}$$



D'où :

$$\forall (c_i, c'_i) \in C_i^2, \forall c_{-ij} \in \prod_{k \in A - \{i,j\}} C_k \quad \beta_j(c_{-ij}, c_i) = \beta_j(c_{-ij}, c'_i)$$

On en déduit alors que  $i \not\! \delta_s j$  ■

### Théorème 3.1, page 63

THÉORÈME 3.1 (CALCUL DES ÉQUILIBRES GLOBAUX)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Nous avons alors :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$$

PREUVE. Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux.

- Le théorème s'appuie sur la relation

$$\forall \sigma \in \Delta(C) \quad \{\sigma\} = \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left\{ \rho(\sigma, A^j) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right\}$$

démontrée de la manière suivante :

- Soit  $\sigma \in \Delta(C)$  et  $\rho^j = \rho(\sigma, A^j)$  quel que soit  $\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}$ .
- Alors :  $\forall (\langle A^j, u^j \rangle, \langle A^{j'}, u^{j'} \rangle) \in \mathcal{U}^2, \forall i \in A^j \cap A^{j'} \quad (\rho^j)_i = \sigma_i = (\rho^{j'})_i$
- Autrement dit  $\rho^j$  et  $\rho^{j'}$  sont compatibles quels que soient  $\langle A^j, u^j \rangle, \langle A^{j'}, u^{j'} \rangle \in \mathcal{U}^2$ .
- Alors

$$\forall (\langle A^j, u^j \rangle, \langle A^{j'}, u^{j'} \rangle) \in \mathcal{U}^2 \quad \{\rho^j \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}}\} \otimes \{\rho^{j'} \uparrow_{A^{j'}}^{\mathcal{A}}\} = \{\sigma\}$$

avec  $\sigma = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i \in A^j \cup A^{j'} \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$

- Et donc  $\bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left\{ \rho^j \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right\} = \{\sigma\}$ .

- Montrons alors que  $\mathcal{G}(\Gamma) \subseteq \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$ .

- Soit  $\sigma^* \in \mathcal{G}(\Gamma)$ .

- $\sigma^*$  peut s'écrire sous la forme  $\bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left\{ \rho^j \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right\}$  avec  $\forall \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \rho^j = \rho(\sigma^*, A^j)$ .

- Or, puisque  $\sigma^*$  est un équilibre global, on a :  $\forall \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \rho^j \in \mathcal{L}_j(\Gamma)$ .

- Et donc  $\sigma^* \in \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$

- Montrons enfin que  $\mathcal{G}(\Gamma) \supseteq \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$ .

- Soit  $\sigma^* \in \bigotimes_{\langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U}} \left( \mathcal{L}_j(\Gamma) \uparrow_{A^j}^{\mathcal{A}} \right)$ .

- Alors  $\forall \langle A^j, u^j \rangle \in \mathcal{U} \quad \rho(\sigma^*, A^j) \in \mathcal{L}_j(\Gamma)$ .
- Et donc  $\sigma^* \in \mathcal{G}(\Gamma)$ .

■

### Théorème 3.2, page 68

THÉORÈME 3.2 (GRAPHE DE DÉPENDANCES SIMPLE)

Soit  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  un réseau de jeux. Soit  $\mathcal{D}_\Gamma$  son graphe de dépendances. Si  $\mathcal{D}_\Gamma$  est un graphe simple, c'est-à-dire si  $\mathcal{D}_\Gamma$  ne contient que des agents auto-indépendants, alors  $\Gamma$  admet un nombre infini d'équilibres globaux. Plus précisément, toute configuration du réseau est équilibre de Nash :

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \Delta(C)$$

PREUVE. Par définition, nous avons déjà  $\mathcal{G}(\Gamma) \subseteq \Delta(C)$ . Pour montrer l'autre inclusion, considérons un jeu stratégique dont le graphe de dépendances est simple et montrons que toute stratégie mixte est équilibre de Nash. Alors, par composition des équilibres de Nash, nous pourrions déduire que toute stratégie mixte de  $\Gamma$  est un équilibre global.

Soient  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique et  $\mathcal{D}_G$  son graphe de dépendances, qui est simple. En notant  $\forall i \in A \quad C_{-i} = \prod_{i \in A - \{i\}} C_i$ , nous avons

- Puisque le graphe de dépendances est simple, alors  $\forall i \in A, i \delta i$ , c'est-à-dire

$$\forall i \in A, \forall (c_i, c'_i) \in C_i^2, \forall c_{-i} \in C_{-i} \quad u_i(c_{-i}, c_i) = u_i(c_{-i}, c'_i)$$

- Donc, étant donné  $\sigma \in \Delta(C)$  et  $i \in A$ , nous avons

$$\begin{aligned} \pi_i(\sigma) &= \sum_{c \in \prod_{i \in A} C_i} \left( \left( \prod_{j \in A} \sigma_j[c_j] \right) \cdot u_i(c) \right) \\ &= \sum_{c_{-i} \in \prod_{i \in A - \{i\}} C_i} \sum_{c_i \in C_i} \left( \left( \prod_{j \in A - \{i\}} \sigma_j[c_j] \right) \cdot (\sigma_i[c_i] \cdot u_i(c_{-i}, c_i)) \right) \\ &= \sum_{c_{-i} \in \prod_{i \in A - \{i\}} C_i} \left( \left( \prod_{j \in A - \{i\}} \sigma_j[c_j] \right) \cdot \sum_{c_i \in C_i} (\sigma_i[c_i] \cdot u_i(c_{-i}, c_i)) \right) \end{aligned}$$

- Puisque :  $\forall (c_i, c'_i) \in C_i^2 \quad u_i(c_{-i}, c_i) = u_i(c_{-i}, c'_i)$ , et que :  $\sum_{c_i \in C_i} \sigma_i^*(c_i) = 1$ , nous avons

$$\pi_i(\sigma) = \sum_{c_{-i} \in \prod_{i \in A - \{i\}} C_i} \left( \left( \prod_{j \in A - \{i\}} \sigma_j[c_j] \right) \cdot u_i(c_{-i}, c_i) \right) \quad \forall c_i \in C_i$$

- L'équation précédente ne dépend pas de  $\sigma_i$ , donc le gain du joueur  $i$  ne dépend pas de sa stratégie :

$$\forall i \in A, \forall (\sigma_i, \sigma'_i) \in \Delta(C_i)^2, \forall \sigma_{-i} \in \prod_{j \in A - \{i\}} \Delta(C_j) \quad \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) = \pi_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$$

- Autrement dit, étant donné  $\sigma^* \in \Delta(C)$  :

$$\forall i \in A, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) = \pi_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \leq \pi_i(\sigma^*)$$

- Et finalement :

$$\forall \sigma^* \in \Delta(C) \quad \sigma^* \in \mathbf{Nash}(G)$$

■

### Lemme 3.1, page 68

LEMME 3.1 (AGENTS AUTO-INDÉPENDANTS ET NOMBRE D'ÉQUILIBRES)

Soit  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique. Soit  $\mathcal{I} \subseteq A$  l'ensemble des agents non auto-dépendants.

Alors :

$$\forall \sigma_{\mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \Delta(C_i), \exists \sigma_{A-\mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in A-\mathcal{I}} \delta(C_i) \quad (\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*) \in \mathbf{Nash}(G)$$

$$\text{avec } \forall i \in A \quad (\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*)_i = \begin{cases} (\sigma_{\mathcal{I}}^* \uparrow_{\mathcal{I}}^A)_i & \text{si } i \in \mathcal{I} \\ (\sigma_{-\mathcal{I}}^* \uparrow_{A-\mathcal{I}}^A)_i & \text{sinon} \end{cases}$$

PREUVE. Soient  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu stratégique et  $\sigma_{\mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \Delta(C_i)$  un profil stratégique pour les agents auto-indépendants. Nous allons construire  $\sigma_{A-\mathcal{I}}^* \in \prod_{i \in A-\mathcal{I}} \Delta(C_i)$  tel que  $\sigma^* = (\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*) \in \mathbf{Nash}(G)$ .

- Considérons le jeu  $G' = \langle A', C', u' \rangle$  défini par
  - $A' = A - \mathcal{I}$ ,
  - $C' = \{C_i\}_{i \in A-\mathcal{I}}$ ,
  - $u' : \prod_{i \in A-\mathcal{I}} C_i \rightarrow \mathbb{R}^{|A-\mathcal{I}|}$  telle que  $u' = (u'_i)_{i \in A-\mathcal{I}}$  et

$$\forall i \in A - \mathcal{I}, \forall c_{-\mathcal{I}} \in \prod_{i \in A-\mathcal{I}} C_i \quad u'_i(c_{-\mathcal{I}}) = \pi_i(c_{-\mathcal{I}}, \sigma_{\mathcal{I}}^*)$$

(On rappelle que  $\pi$  est la fonction de gains mixte du jeu  $G$ . La fonction de gains mixte de  $G'$  est donc  $\pi'$  telle que  $\pi'(c_{-\mathcal{I}}) = \pi_i(c_{-\mathcal{I}}, \sigma_{\mathcal{I}}^*)$ .)

- Le théorème de Nash nous indique qu'il existe au moins un équilibre de Nash pour  $G'$ . Soit  $\sigma_{-\mathcal{I}}^* \in \mathbf{Nash}(G') \subseteq \prod_{i \in A-\mathcal{I}} \Delta(C_i)$  un tel équilibre et soit  $\sigma^* = (\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*)$ .
- Soit alors  $\sigma^* = (\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*)$ .
- Soit  $i \in A - \mathcal{I}$  et  $\sigma_i \in \Delta(C_i)$ . Alors :
  - $(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i)$  peut s'écrire  $(\sigma'_{-\mathcal{I}}, \sigma'_I)$  en considérant d'une part les agents de  $A - \mathcal{I}$  et d'autre part les agents de  $\mathcal{I}$ .
  - Puisque  $i \in A - \mathcal{I}$ ,  $\sigma'_{\mathcal{I}} = \sigma_{\mathcal{I}}^*$ .

◦ D'où :

$$\begin{aligned} \pi_i \sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i &= \pi_i(\sigma'_{-\mathcal{I}}, \sigma_{\mathcal{I}}^*) \\ &= \pi'_i(\sigma'_{-\mathcal{I}}) && \text{Par définition de } \pi' \\ &\leq \pi'_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*) && \text{Car } \sigma^* \in \mathbf{Nash}(G') \\ &\leq \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_{\mathcal{I}}^*) && \text{Par définition de } \pi' \\ &\leq \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i^*) \end{aligned}$$

◦ Donc :

$$\forall i \in A - \mathcal{I}, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i^*)$$

- Puisque que :  $\forall i \in \mathcal{I} \quad i \notin \mathcal{I}$ , nous avons :

$$\forall i \in \mathcal{I}, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i) = \pi(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i^*)$$

- Finalement

$$\forall i \in A, \forall \sigma_i \in \Delta(C_i) \quad \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i) \leq \pi_i(\sigma_{-\mathcal{I}}^*, \sigma_i^*)$$

Et  $\sigma^* \in \mathbf{Nash}(G)$

■

## Théorème 4.1, page 88

THÉORÈME 4.1 (ALGORITHME DE NORMALISATION)

Soient  $G$  un jeu stratégique et  $\Gamma$  le réseau de jeux calculé en appliquant l'algorithme de décomposition sur  $G$ . Alors  $\Gamma \equiv_{\mathcal{G}} G$ .

PREUVE. Soient  $G = \langle A, C, u \rangle$  un jeu et  $\Gamma = \langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U} \rangle$  le réseau de jeux obtenu en appliquant l'algorithme de normalisation sur  $G$ . Soit  $i \in A$  un joueur, l'algorithme de normalisation crée un jeu qui le contient lui et tous ses prédécesseur dans  $G$ , *i.e.* les joueurs  $j \in A$  tels que  $j\delta_u i$ . Soit  $m = \langle A^m, u^m \rangle$  un tel jeu.

*Éléментарité et conservation (forte) des dépendances*

- Par construction de  $m$  nous avons :  $\forall j \in A^m \quad j\delta_u i$
- Soit, par définition de la dépendance :

$$\forall j \in A^m - \{i\}, \exists (c_j, c'_j) \in C_j^2, \exists c_{-j} \in \prod_{k \in A-j} C_k \quad u_i(c_{-j}, c_j) \neq u_i(c_{-j}, c'_j)$$

- Autrement dit :

$$\forall j \in A^m - \{i\}, \exists (c_j, c'_j) \in C_j^2, \exists c_{-j} \in \prod_{k \in A-j} C_k$$

$$\mathbf{Gains}(\rho((c_{-j}, c_j), A^m), i) \neq \mathbf{Gains}(\rho((c_{-j}, c'_j), A^m), i)$$

- Or, puisque  $j \in A^m$  :

$$\forall j \in A^m - \{i\}, \forall c_j \in C_j, \forall c_{-j} \in \prod_{k \in A-j} C_k, \exists c_{-j}^m \in \prod_{k \in A^m-j} C_k$$

$$\rho((c_{-j}, c_j), A^m) = (c_{-j}^m, c_j)$$

- Donc :

$$\forall j \in A^m - \{i\}, \exists (c_j, c'_j) \in C_j^2, \exists c_{-j}^m \in \prod_{k \in A^m-j} C_k$$

$$\mathbf{Gains}((c_{-j}^m, c_j), i) \neq \mathbf{Gains}((c_{-j}^m, c'_j), i)$$

- D'où :

$$\forall j \in A^m - \{i\}, \exists (c_j, c'_j) \in C_j^2, \exists c_{-j}^m \in \prod_{k \in A^m-j} C_k \quad u_i^m(c_{-j}^m, c_j) \neq u_i^m(c_{-j}^m, c'_j)$$

- Finalement :  $\forall j \in A^m - \{i\} \quad j\delta_{u^m} i$
- Donc,  $m$  est *élémentaire*, et puisque  $A^m = \{i\} \cup \delta^-(i)$ , les dépendances sont *fortement conservées*.

*Équivalence*

- Déjà, les joueurs et les stratégies sont les mêmes dans  $G$  et  $\Gamma$ . Reste à vérifier l'égalité des équilibres. Soit  $\sigma^* \in \Delta(C)$  un configuration mixte (de  $G$  ou de  $\Gamma$ ).
- $\sigma^*$  est un équilibre global si, et seulement si,  $\sigma^*$  définit un équilibre de Nash pour chacun des jeux du réseau. Autrement dit, si chaque joueur maximise son gain dans chacun des jeux auxquels il participe.

- Or, pour un joueur  $i$  donné, deux types de jeux existent :
  - si le jeu ne contient pas tous les prédécesseurs de  $i$ , alors les gains de  $i$  sont tous égaux à  $\varepsilon$  et  $i$  maximise son gain quelque soit la stratégie jouée ;
  - si le jeu  $m = \langle A^m, u^m \rangle$  contient tous les prédécesseurs de  $i$ , alors  $\sigma^*$  est telle que  $i$  maximise son gain  $\pi_i^m$  :

$$\pi_i^m(\rho(\sigma, A^m)) = \sum_{c^m \in \prod_{k \in A^m} C_k} \prod_{k \in A^m} \sigma_k[c_k] \times u_i^m(c^m)$$

- Le gain du joueur  $i$  pour une configuration  $\sigma \in \Delta(C)$  dans  $G$  est donné par :

$$\pi_i(\sigma) = \sum_{c \in \prod_{k \in A} C_k} \prod_{k \in A} \sigma_k[c_k] \times u_i(c)$$

- Si l'on considère un joueur  $j \in A - A^m$ , alors  $j \not\delta_u i$  :

$$\begin{aligned} \pi_i(\sigma) &= \sum_{c_{-j} \in \prod_{k \in A - \{j\}} C_k} \sum_{c_j \in C_j} \prod_{k \in A - \{j\}} \sigma_k[c_k] \times \sigma_j[c_j] \times u_i(c_{-j}, c_j) \\ &= \sum_{c_{-j} \in \prod_{k \in A - \{j\}} C_k} \prod_{k \in A - \{j\}} \sigma_k[c_k] \times \sum_{c_j \in C_j} \sigma_j[c_j] \times u_i(c_{-j}, c_j) \\ &= \sum_{c_{-j} \in \prod_{k \in A - \{j\}} C_k} \prod_{k \in A - \{j\}} \sigma_k[c_k] \times u_i(c_{-j}, c_j) \quad \forall c_j \in C_j \end{aligned}$$

- L'égalité précédente est vraie pour tout  $j \in A - A^m$ , donc :

$$\forall c^{-m} \in \prod_{k \in A - A^m} C_k \quad \pi_i(\sigma) = \sum_{c^m \in \prod_{k \in A^m} C_k} \prod_{k \in A^m} \sigma_k[c_k] \times u_i(c^{-m}, c^m)$$

- Or  $u_i(c^{-m}, c^m) = \mathbf{Gains}(\rho(\sigma, A^m), i) = u_i^m(c^m)$
- Autrement dit,  $\pi_i^m(\rho(\sigma, A^m)) = \pi_i(\sigma)$  et  $\sigma^*$  maximise  $\pi_i^m(\rho(\sigma, A^m))$  si, et seulement si  $\sigma^*$  maximise  $\pi_i(\sigma)$ .

- Finalement,  $\sigma^*$  est un équilibre global de  $\Gamma$  si, et seulement si,  $\sigma^*$  est équilibre de Nash de  $G$ , et  $\Gamma$  et  $G$  sont *équivalents*. ■



---

---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

### Références sur les réseaux de jeux

#### Revue d'audience internationale

- [CDMMar] C. Chettaoui, F. Delaplace, M. Manceny et M. Malo. Games network & Application to PAs system. *Biosystems*, 2007, Numéro 87. Version révisée de [CDMM05].

#### Revue d'audience nationale

- [CMMDar] C. Chettaoui, M. Manceny, M. Malo et F. Delaplace. Modélisation des systèmes biologiques par la théorie des réseaux de jeux. *Technique et Science Informatiques (TSI)*, 2007, Volume 26, Numéro 3–4.
- [MCM<sup>+</sup>ar] M. Manceny, C. Chettaoui, M. Malo, G. Barlovatz-Meimon et F. Delaplace. Modéliser les interactions moléculaires par la théorie des réseaux de jeux. *Comptes Rendus Biologie de l'Académie des Sciences*, 2006, Volume 329, Numéro 12.

#### Conférences et colloques d'audience internationale

- [CDMM05] C. Chettaoui, F. Delaplace, M. Manceny et M. Malo. Games network & Application to PAs system. In *Information Processing in Cells and Tissues (IPCAT)*, 2005. Version révisée à paraître dans [CDMMar].
- [DMM<sup>+</sup>04] F. Delaplace, M. Manceny, M. Malo, F. Maquerlot, R. Fodil, D. Lawrence et G. Barlovatz-Meimon. The “PAI-1 game”: towards modelling the plasminogen activation system (PAs) dependent migration of cancer cells with the games network theory. In *Integrative Post-Genomics (IPG)*, 2004.
- [MD05c] M. Manceny et F. Delaplace. On the Relationships between Interactions and Equilibria in Games Network. In *First Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory (SING-1)*, 2005.
- [MD06a] M. Manceny et F. Delaplace. Elementary Modules in Games Networks. In *International Conference on Computational Science (ICCS)*, LNCS 3993, pages 1056–1062. Springer, 2006.

- [MD06b] M. Manceny et F. Delaplace. Modular Decomposition of Complex Interactions using Games Networks. In *Game Theory for Networks (GameNets)*. Actes à paraître dans les ACM, 2006.

### Conférences et colloques d'audience nationale

- [MD05d] M. Manceny et F. Delaplace. Réseaux de jeux et modules élémentaires. In *Réseaux d'Interaction : Analyse, Modélisation et Simulation (RIAMS)*, Actes publiés dans le Rapport de recherche 121, pages 25–30. LaMI UMR 8042 CNRS - Université d'Évry, 2005.

### Rapports de recherche

- [DM04] F. Delaplace et M. Manceny. Games network. Rapport de recherche n°101, LaMI UMR 8042 CNRS - Université d'Évry, 2004.
- [MD05a] M. Manceny et F. Delaplace. Application of Game Theory to Gene Networks Analysis. Rapport de recherche n°114, LaMI UMR 8042 CNRS - Université d'Évry, 2005.
- [MD05b] M. Manceny et F. Delaplace. Games Networks and Elementary Modules. Rapport de recherche n°120, LaMI UMR 8042 CNRS - Université d'Évry, 2005.

### Références citées dans le document

- [AAP06] R. Axelrod, D. Axelrod et K. Pienta. Evolution of cooperation among tumor cells. *PNAS*, 103(36):13474–13479, 2006.
- [ABL<sup>+</sup>83] B. Alberts, D. Bray, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts et J. D. Watson. *Molecular Biology of the Cell*. Garland, 1983.
- [Bas01] Y. Bassaglia. *Biology cellulaire*. Maloine, 2001.
- [BCC<sup>+</sup>] Y. Bang, L. Chae, I. Chang, J. Tang et Y. Yoshikuni. <http://ist-socrates.berkeley.edu/~jont/MetaFluxViewer/>.
- [BCC<sup>+</sup>03] G. Bernot, F. Cassez, J.-P. Comet, F. Delaplace, C. Müller, O. Roux et O. Roux. Semantics of biological regulatory networks. In *Bio-Concur*, September 2003.
- [BCRG04] G. Bernot, J.-P. Comet, A. Richard et J. Guespin. A fruitful application of formal methods to biological regulatory networks: Extending thomas' asynchronous logical approach with temporal logic. *Journal of Theoretical Biology*, In Press, 2004.
- [BGHS02] U. Brand, M. Grünewald, M. Hobe et R. Simon. Regulation of CLV3 Expression by Two Homeobox Genes in *Arabidopsis*. *Plant Physiology*, 129:565–575, 2002.
- [Bla56] D. Blackwell. An analog of the minimax theorem for vector payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 6:1–8, 1956.
- [BLB04] N. Bhat et K. Leyton-Brown. Computing Nash Equilibria of Action-Graph Games. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 35 – 42, 2004.
- [BLPJ03] M. D. Bennett, I. J. Leitch, H. J. Price et J. S. Johnston. Comparisons with *Caenorhabditis* (~100 Mb) and *Drosophila* (~175 Mb) Using Flow Cytometry



- Show Genome Size in *Arabidopsis* to be  $\sim 157$  Mb and thus  $\sim 25\%$  Larger than the Arabidopsis Genome Initiative Estimate of  $\sim 125$  MB. *Annals of Botany*, 91:547–557, 2003.
- [CDL<sup>+</sup>06] C. Chettaoui, F. Delaplace, P. Lescanne, M. Vestergaard et R. Vestergaard. Rewriting Game Theory as a Foundation for State-Based Models of Gene Regulation. In *International Conference on Computational Methods In Systems Biology (CMSB)*, 2006.
- [CM91] E. Coen et E. Meyerowitz. The war of the whorls: genetic interactions controlling flower development. *Nature*, 353(6339): 31–37, 1991.
- [dJGHP01] H. de Jong, J. Geiselmann, C. Hernandez et M. Page. Genetic Network Analyzer: A Tool for the Qualitative Simulation of Genetic Regulatory Networks. Rapport de Recherche RR-4262, INRIA - Rhone-Alpes, Equipe : HELIX, 2001. <http://bacillus.inrialpes.fr/gna/>.
- [dJGHP03] H. de Jong, J. Geiselmann, C. Hernandez et M. Page. Genetic Network Analyzer: Qualitative simulation of genetic regulatory networks. *Bioinformatics*, 2003.
- [Ell93] G. Ellison. Learning, Local Interaction, and Coordination. *Econometrica*, 61(5):1047 – 1071, 1993.
- [ESPLAB04] C. Espinosa-Soto, P. Padilla-Longoria et E. Alvarez-Buylla. A Gene Regulatory Network Model for Cell-Fate Determination during *Arabidopsis thaliana* Flower Development That Is Robust and Recovers Experimental Gene Expression Profiles. *The Plant Cell*, 16:2923–2939, 2004.
- [FIA04] S. Ferrario, R. Immink et G. Angenent. Conservation and diversity in flower land. *Current Opinion in plant biology*, 7(1):84–91, 2004.
- [GBC<sup>+</sup>04] J. Guespin, G. Bernot, J.-P. Comet, A. Mérieau, A. Richard, C. Hulen et B. Polack. Epigenesis and dynamic similarity in two regulatory networks in *Pseudomonas aeruginosa*. *Acta Biotheoretica*, 52(4):379 – 390, 2004.
- [Gib92] R. Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, 1992.
- [GKN02] E. Gansner, E. Koutsofios et S. North. Drawing graphs with dot, 2002. <http://www.graphviz.org/>.
- [GW03] S. Govindan et R. Wilson. A global Newton method to compute Nash equilibria. *Journal of Economic Theory*, 110:65–86, 2003.
- [HL01] A. Heacker et T. Laux. Cell-cell signaling in the shoot meristem. *Current Opinion in Plant Biology*, 4(5):441–446, 2001.
- [HS98] J. Hofbauer et K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [IBS<sup>+</sup>02] J. Ihmels, S. Bergmann, O. Sarig, Y. Ziv et N. Barkai. Revealing modular organization in the yeast transcriptional network. *Nature Genetics*, 31:370–376, 2002.
- [JTA<sup>+</sup>00] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai et A. Barabasi. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407:651–654, 2000.
- [Kau69] S. A. Kauffman. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 1969.
- [Kau93] S. A. Kauffman. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. Oxford University Press, 1993.

- [KLS01] M. Kearns, M. L. Littman et S. Singh. Graphical Models for Game Theory. In *Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 253–260, 2001.
- [KM96] B.A. Krizek et E. Meyerowitz. The *Arabidopsis* homeotic genes APETALA3 and PISTILLATA are sufficient to provide the B class organ identity function. *Development*, 122(1):11–22, 1996.
- [KM01] D. Koller et B. Milch. Multi-Agent Influence Diagrams for Representing and Solving Games. In *Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 1027–1034, 2001.
- [KM03] D. Koller et B. Milch. Multi-Agent Influence Diagrams for Representing and Solving Games. *Games and Economic Behavior*, 245 (1):181 – 221, 2003.
- [KMvS96] D. Koller, N. Megiddo et B. von Stengel. Efficient computation of equilibria for extensive two-person games. *Games and Economic Behavior*, 14:247–259, 1996.
- [Kre90] D. M. Kreps. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, 1990.
- [KRFB02] B. Kerr, M. A. Riley, M. W. Feldman et B. J. Bohannan. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. *Nature*, 418:171–174, 2002.
- [LKS01] M. L. Littman, M. Kearns et S. Singh. An Efficient Exact Algorithm for Singly Connected Graphical Games. In *Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 2001.
- [LM00] P. La Mura. Game Networks. In *Proceedings of the 16th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 335–342, 2000.
- [LM95] Z. Liu et E. Meyerowitz. Leunig regulates agamous expression in *Arabidopsis* flowers. *Development*, 121:975–991, 95.
- [LR89] R. D. Luce et H. Raiffa. *Games and Decisions - Introduction and Critical Survey*. Dover Publications, 1989.
- [MAB98] L. Mendoza et E. R. Alvarez-Buylla. Dynamics of the genetic regulatory network of *Arabidopsis thaliana* flower morphogenesis. *Journal of Theoretical Biology*, 193:307–319, 1998.
- [MAB00] L. Mendoza et E. R. Alvarez-Buylla. Genetic regulation of root hair development in *Arabidopsis thaliana*: A network model. *Journal of Theoretical Biology*, 204:311–326, 2000.
- [MM96] R. D. McKelvey et A. McLennan. Computation of equilibria in finite games. In *Handbook of Computational Economics*, volume 1, pages 87–142. Elsevier, 1996. <http://econweb.tamu.edu/gambit/>.
- [MMT06] R. D. McKelvey, A. M. McLennan et T. L. Turocy. Gambit: Software Tools for Game Theory, Version 0.2006.01.20, 2006. <http://econweb.tamu.edu/gambit/>.
- [MS82] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [MSOI+02] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii et U. Alon. Network motifs: Simple building blocks of complex networks. *Science*, 298:824–827, 2002.
- [Mye91] R. B. Myerson. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1991.
- [Nas51] J. F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

- [Nas96] J. F. Nash. *Essays on Game Theory*. Edward Elgar Publishing Limited, 1996.
- [NS00] M. A. Nowak et K. Sigmund. *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, chapter 8 Games on Grids, pages 134–150. Cambridge University Press, 2000.
- [NS04] M. A. Nowak et K. Sigmund. Evolutionary dynamics of biological games. *Sciences*, 303(6):793–799, february 2004.
- [OK02] L. E. Ortiz et M. Kearns. Nash Propagation for Loopy Graphical Games. In *Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 2002.
- [OR94] M. J. Osborne et A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*, volume 380. MIT Press, 1994.
- [Os03] M. J. Osborne. *An introduction to game theory*. Oxford University Press, 2003.
- [Pap01] C. H. Papadimitriou. Game theory and mathematical economics: a theoretical computer scientist’s introduction. In *42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science: Proceedings*, pages 4–8, 2001.
- [PC03] S. Pérès et J.-P. Comet. Contribution of computation tree logic to biological regulatory networks: example from *Pseudomonas aeruginosa*. In C. Priami, editor, *Proceedings of the 1st Intern. Workshop CMSB’2003*, LNCS 2602, pages 47–56. Springer-Verlag, 2003.
- [Ric05] A. Richard. SMBioNet-1.4 User manual, 2005. <http://smbionet.lami.univ-evry.fr/>.
- [RSM<sup>+</sup>02] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai et A. L. Barabasi. Hierarchical organization of modularity in metabolic networks. *Science*, 297(5586):1551–5, 2002.
- [Rud92] P. Rudall. *Anatomy of flowering plants: An introduction to structure and development*. Cambridge University Press, 1992.
- [SFK<sup>+</sup>05] E. Segal, N. Friedman, N. Kaminski, A. Regev et D. Koller. From signatures to models: understanding cancer using microarrays. *Nature Genetics*, 37(Suppl):S38–S45, 2005.
- [SOMMA02] S. Shen-Orr, R. Milo, S. Mangan et U. Alon. Network motifs in the transcriptional regulation network of *Escherichia coli*. *Nature Genetics*, 31:64–68, 2002.
- [SSR<sup>+</sup>03] E. Segal, M. Shapira, A. Regev, D. Pe’er, D. Botstein et D. Koller. Module networks: identifying regulatory modules and their condition-specific regulators from gene expression data. *Nature Genetics*, 34(2):166–176, 2003.
- [Tho73] R. Thomas. Boolean formalization of genetic control circuits. *Journal of Theoretical Biology*, 42(3):563–585, 1973.
- [Tho91] R. Thomas. Regulatory networks seen as asynchronous automata: A logical description. *Journal of Theoretical Biology*, 153, 1991.
- [TR99] D. Thieffry et D. Romero. The modularity of biological regulatory networks. *Biosystems*, 50:49–59, April 1999.
- [TTK95] R. Thomas, D. Thieffry et M. Kaufman. Dynamical behaviours of regulatory Networks – I. Biological role of feedback loops and practical use of the concept of the loop-characteristic state. *Bulletin of Mathematical Biology*, 57(2):247–276, 1995.

- [vNM44] J. von Neumann et O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, first edition, 1944.
- [WA03] D. M. Wolf et A. Arkin. Motifs modules and games in bacteria. *Current Opinion in Microbiology*, 6:125–134, 2003.
- [Wei97] J. W. Weibull. *Evolutionary Game Theory*. The MIT Press, 1997.
- [WPSY04] K. H. Wrighton, C. M. Prele, A. Sunters et W. A. Yeudall. Aberrant p53 alters DNA damage checkpoints in response to cisplatin: downregulation of CDK expression and activity. *International Journal of Cancer*, 112(5):760–770, 2004.

---

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE - THÉORIE DES JEUX</b>	<b>15</b>
<b>1 Jeux stratégiques</b>	<b>17</b>
1.1 Forme stratégique . . . . .	18
1.1.1 Définition formelle . . . . .	18
1.1.2 Jeux à deux joueurs . . . . .	19
1.1.3 Un exemple de jeux à deux joueurs : Roméo et Juliette . . . . .	19
1.2 Extension mixte . . . . .	20
1.2.1 Stratégie mixte . . . . .	21
1.2.2 Configuration mixte . . . . .	22
1.2.3 Gains mixtes . . . . .	23
1.3 Équilibre de Nash . . . . .	24
1.3.1 Méthodes générales de calcul . . . . .	25
1.3.2 Calcul des équilibres purs . . . . .	27
1.3.3 Calcul des équilibres mixtes . . . . .	29
1.4 Bilan . . . . .	32
<b>2 Interactions locales en théorie des jeux</b>	<b>33</b>
2.1 Dépendance . . . . .	34
2.1.1 Critère de cible . . . . .	35
2.1.2 Critère de calcul . . . . .	36
2.2 Dépendance d'actions . . . . .	38
2.2.1 Dépendance d'actions par stratégies . . . . .	38
2.2.2 Dépendance d'actions par gains . . . . .	41
2.3 Dépendance d'agents . . . . .	45
2.4 Bilan . . . . .	47
<b>DEUXIÈME PARTIE - RÉSEAUX DE JEUX</b>	<b>51</b>
<b>3 Présentation générale des réseaux de jeux</b>	<b>53</b>

3.1	Modèle . . . . .	54
3.1.1	Définition formelle . . . . .	54
3.1.2	Représentation graphique . . . . .	55
3.1.3	Un exemple de réseau de jeux à trois joueurs et deux jeux . . . . .	56
3.2	Réseaux de jeux, théorie des jeux et localité . . . . .	57
3.2.1	Localité dans les réseaux de jeux . . . . .	57
3.2.2	Réseaux de jeux et théorie des jeux . . . . .	57
3.3	Équilibres . . . . .	58
3.3.1	Équilibre local . . . . .	59
3.3.2	Équilibre global . . . . .	60
3.4	Dépendance . . . . .	64
3.4.1	Localité et dépendance . . . . .	64
3.4.2	Dépendance dans un jeu . . . . .	64
3.4.3	Dépendance dans un réseau de jeux . . . . .	65
3.4.4	Utilisation . . . . .	66
3.5	Conditions suffisantes d'existence d'un équilibre global . . . . .	67
3.5.1	Agents auto-indépendants . . . . .	67
3.5.2	Graphe de dépendances simple . . . . .	68
3.5.3	Agents auto-indépendants à jeux multiples . . . . .	68
3.6	Comparaison aux modèles de l'état de l'art . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Recherche des interactions élémentaires par les réseaux de jeux</b>	<b>73</b>
4.1	Structure, équilibres et réseaux de jeux équivalents . . . . .	74
4.1.1	Structure et équilibres . . . . .	74
4.1.2	Réseaux de jeux équivalents . . . . .	75
4.2	Modifier la structure du réseau . . . . .	76
4.2.1	Opérateurs structuraux . . . . .	77
4.2.2	Opérateurs d'observation . . . . .	79
4.3	Modules élémentaires et forme normale . . . . .	83
4.3.1	Modules élémentaires . . . . .	83
4.3.2	Normaliser un réseau de jeu . . . . .	84
4.4	Algorithme de normalisation . . . . .	86
4.4.1	Algorithme de normalisation d'un jeu . . . . .	86
4.4.2	Reconstruire le réseau initial . . . . .	89
4.4.3	Exemple de normalisation d'un jeu à quatre joueurs . . . . .	89
4.5	Bilan . . . . .	91
	<b>TROISIÈME PARTIE - APPLICATIONS ET DÉVELOPPEMENT</b>	<b>95</b>
<b>5</b>	<b>Réseaux de régulation génétique et réseaux de jeux</b>	<b>97</b>
5.1	Régulation génétique . . . . .	98
5.1.1	Mécanismes d'expression : des gènes aux protéines . . . . .	98
5.1.2	Notions de régulation . . . . .	100
5.1.3	Dynamique des réseaux de régulation génétique . . . . .	102
5.2	Le jeu de régulation . . . . .	106
5.2.1	Modélisation des régulations élémentaires . . . . .	106
5.2.2	Modélisation des circuits élémentaires de régulation . . . . .	107
5.2.3	Un petit réseau de circuits élémentaires . . . . .	108

5.3	Régulation de la division cellulaire . . . . .	110
5.3.1	Le modèle biologique . . . . .	110
5.3.2	Modélisation par les réseaux de jeux . . . . .	113
5.4	<i>Arabidopsis thaliana</i> . . . . .	114
5.4.1	Le modèle biologique . . . . .	114
5.4.2	Modélisation par les réseaux de jeux . . . . .	115
5.5	Bilan . . . . .	120
<b>6</b>	<b>GNET-PAD pour la modélisation des réseaux de jeux</b>	<b>123</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>La forme extensive sur un exemple</b>	<b>137</b>
<b>B</b>	<b>Jeux répétés et localité spatiale</b>	<b>139</b>
<b>C</b>	<b>Tables d'évolution d'<i>Arabidopsis thaliana</i></b>	<b>141</b>
<b>D</b>	<b>Preuves</b>	<b>143</b>