Réseaux de jeux et modules élémentaires

Matthieu Manceny[1] & Franck Delaplace[1]

[1]Laboratoire de Méthodes Informatiques (LaMI), UMR 8042 CNRS-Université d'Evry, FRANCE

Résumé

Dans cet article nous proposons une extension modulaire originale de la théorie des jeux : la *théorie des réseaux de jeux*. L'objectif de cette extension est de fournir un cadre de travail théorique permettant de modéliser les *dynamiques modulaires* résultant d'*interactions locales* entre différents agents. Les réseaux de jeux décrivent des situations où un agent peut participer à plusieurs jeux de manière simultanée. Nous nous focalisons en particulier sur la détermination d'*équilibres globaux*, résultant de la composition des équilibres locaux à chaque jeu du réseau.

Cependant, plusieurs réseaux de jeux peuvent représenter la même situation. Nous recherchons alors une *forme normale* qui mette en valeur des jeux aussi petits que possible en terme de nombre de joueurs. Ces jeux sont qualifiés de *modules élémentaires*. Un algorithme permettant de décomposer un jeu en modules élémentaires est donné.

1 Introduction

La formalisation des systèmes moléculaires par des réseaux d'interactions propose une représentation du système sous forme d'un graphe où les nœuds du réseau représentent les agents moléculaires (protéines, gènes, complexes, métabolites, ...) et les arcs les relations d'interactions. La nature des interactions dépend du contexte de modélisation et, pour ne donner qu'un exemple, citons les réseaux d'expression des gènes qui décrivent la capacité d'un gène à réguler indirectement, par la protéine produite, l'expression d'un autre gène. Les réseaux d'interactions fournissent essentiellement la structure des interactions. Les propriétés découlant de leur analyse correspondent généralement à des *propriétés potentielles* du système. Par exemple, un réseau dont le degré de connectivité suit une loi puissance (power law) identifie des propriétés de robustesse du système aux « attaques » non ciblées ([5, 1]), grâce à la présence en faible nombres de concentrateurs (hubs), nœuds à forts degrés. De manière plus générale, l'étude des réseaux d'interactions dans un cadre de modélisation (biologique) repose sur un parallèle entre les propriétés du réseau (loi puissance) et celles ayant trait à la dynamique ou à l'évolution du système considéré (robustesse).

Pour pousser plus en avant cette étude vers l'analyse des dynamiques d'interactions moléculaires, il est nécessaire d'adjoindre un modèle examinant comment interagissent ces agents et quel est leur impact sur leur état interne. L'étude de la fonction biologique est au centre de cette analyse car celle-ci résulte en partie des interactions moléculaires et de leur évolution.

L'une des propriétés jugées centrale pour l'étude des systèmes biologiques concerne leur *modularité* ([9]). Schématiquement, un module peut se définir comme un ensemble d'agents, un *support*, agissant de manière coordonnée dans la perspective de réaliser une *fonction* spécifique. Pour l'analyse des réseaux moléculaires nous pouvons assimiler la fonction à une réponse coordonnée à un stimulus environnemental, comme c'est le cas pour l'analyse des réseaux génétiques par les méthodes de puces à ADN. L'intérêt de cette analyse est notamment de fournir des cibles thérapeutiques complexes ne restreignant pas la cible à un unique agent en rapport avec la fonction considérée mais en l'élargissant à plusieurs agents coopérant (le support du module réalisant la fonction considérée).

A la différence d'artefacts où un module s'identifie souvent par des propriété de localité spatiale, il semblerait que l'étude des réseaux moléculaires ne révèle pas cette propriété ([10]). Pour étudier la modularité des réseaux moléculaires, il est nécessaire de considérer des modèles représentant la dynamique des interactions. Dans le cadre d'une modélisation discrète, nous modéliserons la dynamique des interactiosn par la théorie des jeux et plus précisément la *théorie des réseaux de jeux*. La théorie des jeux a pour objet de modéliser les interactions stratégiques entre des agents par un jeu ([8]). Elle étudie comment des agents (ou joueurs) en interaction font évoluer leur choix (ou leur état) en fonction de la nature des interactions (le jeu). Les applications de la théorie des jeux dépassent le cadre de celui des jeux et couvrent différents champs tels que l'Economie ([4]) et la Biologie ([2, 6]). La théorie des réseaux de jeux étend la théorie des jeux en considérant un ensemble de jeux inter-connectés en réseaux. Ainsi, un joueur peut participer à plusieurs jeux. Schématiquement, chaque jeu représentera la dynamique d'un module qui se définit par les joueurs connectés à celui-ci.

L'article se présente de la manière suivante : la partie 2 présente les notions principales de la théorie des jeux et de la théorie des réseaux de jeux. La partie 3 s'intéresse à la recherche de modules élémentaires dans les réseaux de jeux et donne un algorithme effectuant cette recherche.

2 Théorie des jeux — théorie des réseaux de jeux

La théorie des réseaux de jeux est une extension de la théorie des jeux. La section 2.1 présente les principales notions de théorie des jeux et la section 2.2 s'intéresse à l'extension. Le lecteur peut se référer à [7] ou [3] pour une présentation plus complète.

2.1 Théorie des jeux

Jeux stratégiques. La théorie des jeux stratégiques propose un modèle d'interactions où les agents interagissant choisissent ce qu'ils vont faire, leur *stratégie*, une fois pour toute et de manière simultanée. De plus, chaque agent est *rationnel* — il cherche à maximiser son gain — et *parfaitement informé* des gains des autres agents. Formellement, un jeu stratégique se définit de la manière suivante :

Définition 1 (Jeu stratégique)
Un jeu stratégique Γ est un triplet $\langle A, C, u\rangle$ où :
- *A est l'ensemble des agents, ou* joueurs*.*
- *$C = \{C_i\}_{i\in A}$ est un ensemble d'ensembles de* stratégies *; $C_i = \{c_i^1, ..., c_i^{m_i}\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur i.*
- *$u = (u_i)_{i\in A}$ est le vecteur des* fonctions de gains *; $u_i : \times_{i\in A} C_i \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction qui attribue un gain au joueur i suivant la configuration du jeu i.e. les stratégies des autres joueurs.*

Représentation par tableau. Les jeux stratégiques 2×2 — 2 joueurs ayant chacun 2 stratégies — sont souvent utilisés en théorie des jeux pour en présenter les notions. Un tel jeu est habituellement représenté par un tableau où les stratégies du premier joueur sont en ligne et celles du second joueur en colonnes. Ainsi dans l'exemple de la figure 1, si le joueur x joue sa stratégie `Off` et le joueur y sa stratégie `On`, un gain de 0 est attribué au joueur x et un gain de 2 au joueur y.

Équilibre de Nash. Un concept central en théorie des jeux est la notion d'*équilibres de Nash* qui permet de capturer les configurations stables d'un jeu stratégique :

Définition 2 (Équilibre de Nash)
Soit $\Gamma = \langle A, C = \{C_i\}_{i\in A}, u = (u_i)_{i\in A}\rangle$ un jeu stratégique. Un équilibre de Nash est une configuration du jeu $c^* \in \times_{i\in A} C_i$ telle que :

$$\forall i \in A, \forall c_i \in C_i, u_i((c^*_{-i}, c_i)) \leq u_i(c^*)$$

Tableau de gains

x/y	Off	On
Off	$(1,1)$	$(0,2)$
On	$(2,0)$	$(-1,-1)$

Equilibres de Nash

$\{(\texttt{On},\texttt{Off}),(\texttt{Off},\texttt{On})\}$

FIG. 1 – Exemple de jeu à deux joueurs x, y ayant chacun deux stratégies

où (c^*_{-i}, c_i) correspond à la configuration c^* dans lequel le joueur i joue sa stratégie c_i (plutôt que c^*_i).

Dans un équilibre de Nash la stratégie jouée par l'agent i est la *meilleure réponse* possible aux stratégies des autres joueurs. L'agent i n'a donc pas d'intérêt à changer, seul, de stratégie.

Dans l'exemple de la figure 1 on trouve deux équilibres de Nash qui correspondent aux configurations $(x = \texttt{Off}, y = \texttt{On})$ et $(x = \texttt{On}, y = \texttt{Off})$.

2.2 Théorie des réseaux de jeux

Réseaux de jeux stratégiques. En théorie des jeux, tous les agents intéragissent les uns avec les autres. La théorie des réseaux de jeux étend la théorie des jeux, et autorise une description modulaire de la dynamique du réseau. Les agents peuvent ainsi participer à plusieurs jeux de manière simultanée. Les jeux du réseau peuvent alors être vus comme des modules dynamiques décrivant les interactions locales entre les agents participant au jeu. Formellement, un réseau de jeux se définit de la manière suivante :

Définition 3 (Réseau de jeux)
Un réseau de jeux est un triplet $\langle \mathcal{A}, C, \mathcal{U}\rangle$ où :
- *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des agents, ou joueurs.*
- *$C = \{C_i\}_{i\in A}$ est un ensemble d'ensembles de stratégies ; $C_i = \{c_i^1, ..., c_i^{m_i}\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur i.*
- *$\mathcal{U} = \{\langle A_j, u^j\rangle\}$ est un ensemble de jeux avec pour chaque noeud $A_j \subseteq \mathcal{A}$ l'ensemble des agents et $u^j = (u_i^j : \times_{i\in A_j} C_i \mapsto \mathbb{R})_{i\in A_j}$ le vecteur des fonctions de gains des agents impliqués dans le jeu.*

Il n'est pas nécessaire dans les jeux de rappeler l'ensemble des stratégies d'un agent, car celles-ci sont identiques pour tous les jeux auxquels il participe, et sont donc associée à l'agent plutôt qu'au jeu.

Représentation graphique. Les réseaux de jeux se représentent sous forme de graphes bipartis (fig. 2). Dans un tel graphe, les agents sont représentés par un cercle qui contient leur nom et les jeux par des rectangles. Les agents sont reliés aux jeux auxquels ils participent.

Réseau de jeux

x —

x/y	Off	On
Off	$(1,1)$	$(0,2)$
On	$(2,0)$	$(-1,-1)$

— y —

y/z	Off	On
Off	$(0,0)$	$(1,-1)$
On	$(-1,1)$	$(2,2)$

— z

Équilibres globaux

$\{(\texttt{On},\texttt{Off},\texttt{Off}),(\texttt{Off},\texttt{On},\texttt{On})\}$

FIG. 2 – Exemple de réseau de jeux à trois joueurs et deux jeux

Équilibres. Deux types de dynamique émergent de la représentation en réseau de jeux : une locale à chaque jeu et une globale sur l'ensemble du réseau. De fait, deux notions d'équilibres sont définies : les équilibres locaux et les équilibres globaux. Les *équilibres locaux* correspondent aux équilibres de Nash de chacun des jeux constituant le réseau. Dans l'exemple de la figure 2, on trouve ainsi deux équilibres locaux pour le jeu x/y (($x = \texttt{Off}, y = \texttt{On}$) et ($x = \texttt{On}, y = \texttt{Off}$)) et deux équilibres locaux pour le jeu y/z (($y = \texttt{Off}, z = \texttt{Off}$) et ($y = \texttt{On}, z = \texttt{On}$)). Les *équilibres globaux* correspondent à une configuration d'équilibres pour l'ensemble des jeux du réseau et sont calculés en combinant les équilibres de Nash des différents jeux. Dans notre exemple, y peut avoir la stratégie Off ou On, ce qui correspond à deux équilibres globaux : ($x = \texttt{On}, y = \texttt{Off}, z = \texttt{Off}$) et ($x = \texttt{Off}, y = \texttt{On}, z = \texttt{On}$).

3 Recherche de modules élémentaires

3.1 Structure et équivalence de réseaux

Dans le cadre des réseaux de jeux, chacun des jeux constituant le réseau s'identifie naturellement comme étant un module. Un réseau de jeux peut donc être vue comme la composition de modules reliés les uns aux autres au travers des agents. Chaque module définit une *dynamique locale* et la *structure* du réseau — la manière dont sont reliés les modules — une dynamiqque globale. Ces dynamiques peuvent être observées aux travers de leurs états stables respectifs : les équilibres locaux et globaux.

Cependant, différentes structures peuvent modéliser la même dynamique. Dans l'exemple de la figure 4, le réseau à un jeu unique, à trois joueurs à gauche, possède les mêmes équilibres, et la même dynamique, que le réseau à deux jeux, à droite. Les deux réseaux sont alors dits *équivalents*.

De fait, la recherche d'une « *forme normale* », c'est-à-dire la représentation canonique d'un réseau de jeux, est indispensable. La forme normale d'un réseau de jeux se définit comme étant un réseau de jeux équivalent — ayant les mêmes équilibres globaux — et dont les jeux mettent en interactions le moins de joueurs possible. Dans la forme normale d'un réseau de jeux, les jeux sont qualifiés de « *modules élémentaires* ».

3.2 Algorithme

L'algorithme de la figure 3 permet de séparer un jeu en modules élémentaires[1]. Il se fonde sur la notion de dépendance entre agents.

Dépendance Intuitivement, un agent A dépend d'un agent B si les gains de A sont modifiés par les stratégies de B. Plus formellement, la notion de dépendance se définit de la manière suivante :

Définition 4 (Dépendance)
Soit $\langle A, C, u\rangle$ un jeu stratégique et $j, i \in A^2, i \neq j$ deux agents. j dépend *de i, on note $i\delta_u j$, si :*

$$\exists c_i \in C_i, \exists c_i' \in C_i, \exists c_{-i} \in C_{-i}, u_j(c_{-i}, c_i) \neq u_j(c_{-i}, c_i')$$

Plus précisément, l'algorithme s'attache à la notion de prédécesseur :

Définition 5 (Prédécesseurs)
Soit $\langle A, C, u\rangle$ un jeu stratégique. On note par $\delta_u^-(j)$, $j \in A$, l'ensemble des prédécesseurs de j :

$$\forall j \in A, \delta_u^-(j) = \{i \in A | i\delta_u j \wedge i \neq j\}$$

[1]Pour des raisons de place on ne présente ici que l'algorithme, sa correction est montrée dans [3]

La notion de dépendance, et de prédécesseur, est utilisée pour surligner les interactions entre les agents et déterminer ceux qui participent à un même module élémentaire. En particulier, pour chaque agent il existe un module élémentaire qui le contient lui et ses prédécesseurs. De plus, il ne peut pas y avoir de relation d'inclusion entre les agents participant à deux modules élémentaires différents.

Recherche de gains Une fois trouvés les agents participant aux modules élémentaires, il reste à attribuer les gains. Pour un agent $a \in A$ participant à un module élémentaire G :

- si tous les prédécesseurs de a sont dans G, on peut facilement calculer ses gains car aucun des agents absents n'a d'influence sur a. La fonction *pick* de l'algorithme de la figure 3 choisit une configuration du jeu de départ possédant les mêmes stratégies que les joueurs du module élémentaire et en extrait les gains de a.
- si au moins un des prédécesseurs de a n'est pas dans G, tous les gains de a sont nuls.

La figure 3 décrit l'algorithme de séparation, qui est illustré sur la figure 4.

```
function separate(⟨A, C, u⟩ : un jeu)
  𝒰' := ∅ ; g := 0 ;
  /*Recherche des modules élémentaires à créer*/
  Pour tout i ∈ A
      g := g + 1 ;
      agent(g) := i ∪ δ⁻_u(i) ;
  FinPourtout
  U = [1 : g] ;
  Pour tout g' ∈ [1 : g]
      U := U − {g'' ∈ U | agent(g'') ⊂ agent(g') ∨ (agent(g') = agent(g'') ∧ g'' < g')} ;
  FinPourtout
  /*Attribution des gains*/
  Pour tout g ∈ U
      Pour tout j ∈ agent(g)
          Si δ⁻_u(j) ∩ agent(g) = δ⁻_u(j) Alors
            Pour tout c ∈ ×_{i∈agent(g)} C_i
                u^g_j(c) := pick(c, j)
            FinPourtout
          Sinon
            Pour tout c ∈ ×_{i∈agent(g)} C_i
                u^g_j(c) := 0
            FinPourtout
          FinSi
      FinPourtout
      𝒰' = 𝒰' ∪ {⟨agent(g), u^g⟩} ;
  FinPourtout
  return ⟨A, C, 𝒰'⟩ ;
```

FIG. 3 – Algorithme de recherche des modules élémentaires d'un jeu

4 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé la théorie des réseaux de jeux comme outil d'étude de la modularité des réseaux moléculaires et plus généralement des systèmes complexes. La théorie des réseaux de jeux étend la théorie de jeux en permettant la définition d'interactions locales entres agents. Ces interactions locales sont portées par les différents jeux qui constituent le réseau, et sont

Jeu (tableau de gains)

x	y	z	u^x	u^y	u^z
Off	Off	Off	1	2	-1
Off	Off	On	1	2	0
Off	On	Off	-1	0	-1
Off	On	On	-1	0	0
On	Off	Off	0	0	0
On	Off	On	0	0	-1
On	On	Off	3	3	0
On	On	On	3	3	-1

Forme normale

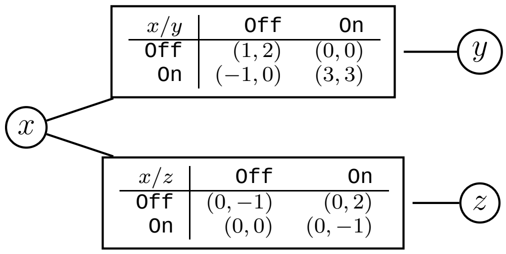

FIG. 4 – Jeu à 3 joueurs et sa forme normale

observées au travers de leur équilibres dits locaux. A l'échelle du réseau complet, ces équilibres locaux se combinent pour former des équilibres globaux.

Une même dynamique complexe peut être représentée par plusieurs réseaux de jeux. Nous nous sommes intéressé à la recherche d'une représentation canonique des réseaux de jeux — la forme normale — où chaque jeu fait participer le moins d'agents possible. Dans la forme normale les jeux sont qualifiés de modules élémentaires et mettent en relation les agents les plus « connectés ». De par leur taille réduite les modules élémentaires devraient être plus compréhensibles que les jeux du réseau de départ, et permettre tout de même d'identifier des structures qui seraient impossibles à caractériser si on ne considérait les agents que pris séparément.

La théorie des réseaux de jeux a été utilisée pour modéliser une partie du système activateur du plasminogène (PAs) intervenant dans la mobilité des cellules cancéreuses. Pour des raisons de place, nous ne développons pas ce travail ici, mais le lecteur pourra se référer à [2] pour plus d'informations. Le réseau de jeux du système PAs, composé de 10 agents biologiques et 6 jeux, a permis de mettre en évidence l'importance de l'inhibiteur de l'activateur du plasminogène (PAI-1) ainsi que l'existence de deux états d'équilibre, un état non migratoire et un état pro migratoire. Ces deux états ont été retrouvés expérimentalement.

Références

[1] A. Barabasi. *Linked : How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means*. Plume, 2003.

[2] C. Chettaoui, F. Delaplace, M. Manceny, and M. Malo. Games Network & Application to PAs system. In *Information Processing in Cells and Tissues (IPCAT)*, 2005.

[3] F. Delaplace and M. Manceny. Games network. Technical Report 101-2004, Laboratoire de Méthodes Informatiques (LaMI), CNRS-UMR 8042, Université d'Évry, 2004.

[4] R. Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, 1992.

[5] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A. Barabasi. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407 :651–654, 2000.

[6] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge Univ. Press, 1982.

[7] R. B. Myerson. *Game Theory : Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1991.

[8] M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*, volume 380. MIT Press, 1994.

[9] E. Segal, N Friedman, N Kaminski, A. Regev, and D. Koller. From signatures to models : understanding cancer using microarrays. *Nature Genetics*, 37(Suppl) :S38–S45, 2005.

[10] E. Segal, M. Shapira, A. Regev, D. Pe'er, D. Botstein, and D. Koller. Module networks : identifying regulatory modules and their condition-specific regulators from gene expression data. *Nature Genetics*, 34(2) :166–176, 2003.